N° d'ordre : 63

THÈSE

PRÉSENTÉE

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE BESANÇON

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES

Mention : MATHÉMATIQUES PURES

PAR

Moussa MAÏGA

Licencié ès Sciences

THÈSE

- RELATION ENTRE LA NOTION DE RELATION DÉFINISSANTE ET LA NOTION D'IDENTITÉ DANS UN DEMI-GROUPE.
- EXEMPLES DE DEMI-GROUPES DÉFINIS PAR DES RELATIONS DÉFINISSANTES.

Soutenue le 26 Juin 1967, devant la Commission d'Examen

JURY : MM. CHATELET, *Professeur* — Président
LEFEBVRE, *Professeur* — Examinateurs
PARIZET, Maître de Conférences — Examinateurs

IMP. H. ROBERET - BESANÇON

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547627_0013

N° d'ordre : 63

THÈSE

PRÉSENTÉE

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE BESANÇON

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES

Mention : MATHÉMATIQUES PURES

PAR

Moussa MAÏGA

Licencié ès Sciences

THÈSE

- RELATION ENTRE LA NOTION DE RELATION DÉFINISSANTE ET LA NOTION D'IDENTITÉ DANS UN DEMI-GROUPE.
- EXEMPLES DE DEMI-GROUPES DÉFINIS PAR DES RELATIONS DÉFINISSANTES.

Soutenue le 26 Juin 1967, devant la Commission d'Examen

JURY : MM. CHATELET, *Professeur* — Président
LEFEBVRE, *Professeur* — Examinateurs
PARIZET, Maître de Conférences — Examinateurs

IMP. H. ROBERET – BESANÇON

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

UNIVERSITE DE BESANCON .

FACULTE DES SCIENCES

Doyen Honoraire : M. GLANGEAUD

Professeurs Honoraires : MM. DUFFIEUX, UEBERSFELD

Doyen	M.	JACQUEMAIN ..	Chimie Appliquée
Assesseur	M.	MESNAGE	Chronométrie
Professeurs	MM.	ARBEY	Astronomie
		BERNARD	Chimie Physique
		CHALEAT	Mécanique Appliquée
		CHATELET	Mathématiques
		DREYFUSS	Géologie Minéralogie
		GALATRY	Physique Théorique
		GOMOT	Zoologie
		NAHON	Mécanique Théorique
		PERROT	Chimie Générale
		PLUVINAGE ...	Physique Théorique
		QUANTIN	Botanique
		RIGAL	Mathématiques
		RIPPLINGER ..	Physiologie Animale
		THEOBALD	Géologie
		THIEBAUT	Pétrographie Minéralogique
		TRONCHET	Botanique
		VIENOT	Physique Générale
Professeur Associé	M.	DEFIX	Mécanique Appliquée
Professeurs sans Chaire ..	MM.	CERUTTI	Chimie Appliquée
		DEVIN	Chimie Générale
		GOUARNE	Mathematiques
	Mle	LEGRAND	Botanique
	MM.	POTIER	Cristallographie
		REAL	Zoologie
		VALLEE	Mathématiques Appliquées
Maitres de Conférences ...	MM.	BONNEAU	Astronomie
		HARTMANN	Physique Générale
		PARIZET	Mathématiques
		THEOBALD	Spectroscopie Hertzienne
Chargés d'Enseignement .	MM.	MASSONIE	Mathématiques
		REMOND	Chronométrie
Conseiller Administratif Universitaire	M.	LAMBERT	

A LA MEMOIRE DE MONSIEUR CROISOT

INTRODUCTION.

(Les numéros entre crochets et les indications, entre parenthèses, renvoient à la bibliographie placée à la fin).

1) En théorie des groupes, les notions de groupe libre et de relations définissantes sont des notions fondamentales. On sait, en effet, que tout groupe est isomorphe à un groupe quotient d'un groupe libre et que tout groupe peut être défini par un système de relations définissantes, ([3], page 100) et ([4], p. 124-125).

2) Ces notions ont été étendues aux demi-groupes par différents auteurs, par exemple CLIFFORD et PRESTON ([1] , p. 40 à 46), LJAPIN ([6], p. 344 et suivantes ; p. 354).

On trouve aussi une notion voisine de celle de relations définissantes : la notion d'identité ([5], p. 14 - 11) et ([6], p. 359).

3) Mon travail a consisté à analyser ces diverses notions, à comparer les différentes définitions données par les auteurs précités et à préciser le rapport entre la notion de relation définissante et celle d'identité, c'est-à-dire finalement à tenter d'éclaircir la situation dans un domaine particulièrement délicat de la théorie des demi-groupes.

4) L'originalité de ce travail réside dans une synthèse personnelle de résultats épars glanés dans la littérature mathématique, ainsi

que dans certaines définitions, théorèmes et exemples personnels.

Les références bibliographiques contenues dans le texte permettront au lecteur de séparer mon apport personnel de celui des auteurs cités.

5) Je tiens à exprimer ici ma profonde reconnaissance à Messieurs CHATELET, LEFEBVRE et RUEDIN dont les encouragements et les conseils m'ont été infiniment précieux tant au cours de mon travail de recherche que lors de sa rédaction.

Je dois également rendre un déférent hommage à la mémoire de Monsieur Robert CROISOT dont j'ai suivi l'enseignement pendant mes années d'étude à Besançon et à qui je dois ma formation mathéma - tique. En particulier, son travail sur les " automorphismes intérieurs d'un semi-groupe " [2] m'a été extrêmement utile par les exemples qui y figurent et dont je me suis largement inspiré.

-I-

Demi-groupe libre sur un ensemble ([1], p. 40)

1°) Le demi-groupe des suites finies d'éléments d'un ensemble.

(a) Soit X un ensemble quelconque non vide, dont les éléments pourront être appelés "lettres" . Désignons par F_X l'ensemble de toutes les suites finies d'éléments de X.

Si $(x_1,x_2,---,x_m)$ et $(y_1,y_2,---,y_n)$ appartiennent à F_X [où $x_i, y_j \in X$, $i = 1,2,---,m$; $j = 1,2,---,n$] nous définissons leur produit par simple juxtaposition :

$$(x_1,x_2,---,x_m)(y_1,y_2,---,y_n) = (x_1,x_2,---,x_m,y_1,y_2,---,y_n)$$

F_X devient ainsi un demi-groupe : nous l'appellerons provisoirement le demi-groupe des suites finies d'éléments de X.
Les éléments de F_X peuvent être appelés " mots " ([1], p. 40).

Si nous identifions chaque élément x de X avec la suite (x) de longueur 1, nous aurons alors, d'après la définition ci-dessus du produit dans F_X :

$$(x_1,x_2,---,x_m) = (x_1)(x_2)---(x_m) = x_1x_2 --- x_m$$

On voit donc que X est un système générateur pour F_X .

Remarques :

(1) dans un mot $w = x_1x_2---x_m$, les x_i $(i = 1,2,---,m)$ ne sont pas nécessairement tous distincts, chacun d'eux pouvant intervenir plus d'une fois. Si nous convenons d'écrire x^n pour le mot formé de n lettres consécutives x, un mot quelconque w peut alors s'écrire :

$w = x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m}$ où les $n_i \in \mathbb{N}^*$ et où deux x_i consécutifs quelconques sont distincts.

(2) Il est commode quelquefois d'adjoindre à F_X un élément neutre 1, pour avoir F_X^1 ([1], page 41).

1 peut être considéré comme le "mot vide", mot qui ne comprend aucune lettre.

(b) égalité dans F_X : F_X étant un ensemble d'éléments qui sont des n-uples, deux mots de F_X seront égaux si et seulement s'ils sont constitués par les mêmes lettres écrites dans le même ordre ou encore si :

$$x_1x_2\cdots x_m = y_1y_2\cdots y_n \Longrightarrow m = n \text{ et } (\forall i = 1,2,\cdots,m)\ (x_i = y_i).$$

Il résulte de cette définition de l'égalité dans F_X et de la loi de composition de F_X (juxtaposition) que F_X est un demi-groupe dont tous les éléments sont réguliers (ou semi-groupe) et que X est un système générateur minimal de F_X, sur lequel tout élément de F_X admet une décomposition unique.

2°) Caractérisation de F_X.

(a) Demi-groupe libre sur un ensemble, demi-groupe libre.

Définition (d) : on dira qu'un demi-groupe D, contenant un ensemble $X \neq \emptyset$, est libre sur X ou librement engendré par X si X est un système générateur minimal de D et si tout élément de D s'écrit de manière unique sous forme de "produits" d'un nombre fini d'éléments de X.

En d'autres termes, si D est noté multiplicativement (.) :

$$\begin{cases} (1)\ \forall a \in D, \text{ il existe } x_1, x_2, \text{---}, x_m \in X \text{ tels que } a = x_1.x_2.\text{---}.x_m \\ (2)\ \text{Si de plus } a = x'_1.x'_2.\text{---}.x'_n \text{ avec } x'_j\ (j = 1,2,\text{---},n) \in X \text{ alors :} \\ n = m \text{ et } (\forall i \in \{1,2,\text{---},n\})\ \ x'_i = x_i\ . \end{cases}$$

Exemple : F_X est libre sur X (au sens de (d)).

Montrons que cette définition est équivalente à celle (d') de Clifford ([1], p. 41) :

Définition (d') : on dira qu'un demi-groupe D contenant un ensemble $X \neq \emptyset$ est libre sur X ou librement engendré par X si X est un système générateur minimal pour D et si toute application ϕ_o de X dans un demi-groupe quelconque S peut être prolongée en un homomorphisme ϕ de D dans S.

Démonstration (dans tout ce qui suit on notera par . la loi de composition dans D et par l'absence de signe la juxtaposition dans F_X).

Si D est libre sur X au sens de la définition (d), il l'est au sens de (d') : en effet soit ϕ_o une application quelconque de X dans un demi-groupe S, $\phi_o : X \longrightarrow S$.

Tout élément a de D s'écrit de manière unique :

$a = x_1.x_2.\text{---}.x_n$ avec $x_i\ (i = 1,2,\text{---},n) \in X$ [définition (d)].

Soit T la loi de composition de S.

La correspondance $\phi : D \longrightarrow S$ définie par :

$$\phi(a) = \phi_o(x_1)\ T\ \phi_o(x_2)\ T\ \text{---}\ T\ \phi_o(x_n)$$

est une application de D dans S à cause de l'unicité de la décomposition $a = x_1.x_2.\text{---}.x_n$.

D'autre part ϕ est visiblement un homomorphisme et prolonge ϕ_o à D, (c.q.f.d).

Si D est libre sur X au sens de la définition (d'),il l'est au sens de (d) : en effet prenons pour S le demi-groupe F_X des suites finies d'éléments de X et pour $\phi_o : X \longrightarrow F_X$ l'injection canonique de X dans F_X .

Si un élément $a \in D$ admettait deux décompositions sur X, à savoir :

$$x = \begin{cases} x_1.x_2.\ ---\ .x_m \\ x'_1.x'_2.\ ---\ .x'_n \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} x_i \ (i = 1,2,---,m) \in X \\ x'_j \ (j = 1,2,---,n) \in X \end{cases}$$

alors : $\phi(a) = \begin{cases} \phi(x_1.x_2.---.x_m) \\ \phi(x'_1.x'_2.---.x'_n) \end{cases}$

où ϕ est un homomorphisme prolongeant ϕ_o à D. On aurait :

$\phi(x_1.x_2.---.x_m) = \phi(x'_1.x'_2.---.x'_n)$, c'est-à-dire :

$\phi(x_1)\ \phi(x_2)\ ---\ \phi(x_m) = \phi(x'_1)\ \phi(x'_2)\ ---\ \phi(x'_n)$, ou :

$\phi_o(x_1)\ \phi_o(x_2)\ ---\ \phi_o(x_m) = \phi_o(x'_1)\ \phi_o(x'_2)\ ---\ \phi_o(x'_n)$, et enfin :

$x_1\ x_2\ ---\ x_m = x'_1\ x'_2\ ---\ x'_n$ dans F_X, dont on déduirait m = n et $x'_i = x_i$ pour tout i = 1,2,---,n (c.q.f.d).

L'équivalence des deux définitions est bien établie.

Définition générale : on dira plus généralement qu'un demi-groupe D est libre s'il est libre, au sens de (d) ou (d'), sur un de ses sous-ensembles X.

Remarque : dans la définition (d'), l'homomorphisme ϕ prolongeant ϕ_o est unique, car si ϕ' est un (autre) homomorphisme $D \longrightarrow S$ coïncidant avec ϕ dans X, alors pour tout $a = x_1.x_2.---.x_n$ de D,

on aura :

$$\begin{aligned}\phi'(a) &= \phi'(x_1.x_2. \text{ --- } .x_n)\\ &= \phi'(x_1)\ T \text{ --- } T\ \phi'(x_n)\\ &= \phi_o(x_1)\ T \text{ --- } T\ \phi_o(x_n)\\ &= \phi(x_1)\ T \text{ --- } T\ \phi(x_n)\\ &= \phi(x_1. \text{ --- } .x_n) = \phi(a)\end{aligned}$$

(b) Caractérisation de F_X : F_X étant libre sur X au sens de (d), la remarque précédente et l'équivalence des définitions (d) et (d') me permettent d'énoncer le théorème de définition suivant ([1],p.41)

Théorème 1 : Soit X un ensemble non vide et F_X le demi-groupe des suites finies d'éléments de X. Toute application ϕ_o de X dans un demi-groupe quelconque S peut être prolongée en un homomorphisme unique de F_X dans S.

Un autre théorème intéressant, relatif à F_X, est le suivant ([1], p. 42) :

Théorème 2 : Soit F_X le demi-groupe des suites finies d'éléments d'un ensemble non vide X et ϕ_o une application de X dans un demi-groupe S. Si ϕ est le prolongement de ϕ_o à F_X [théorème 1] alors :

$$(\phi \text{ surjectif}) \Longleftrightarrow (\phi_o(X) \text{ engendre } S).$$

Démonstration : Supposons S noté multiplicativement (.) :

Si ϕ est surjectif, quel que soit $a \in S$, il existe $w = x_1 \text{ --- } x_n$ appartenant à F_X tel que $a = \phi(w)$. On aura :

$$\begin{aligned}a = \phi(x_1 \text{ --- } x_n) &= \phi(x_1) . \text{ --- } . \phi(x_n)\\ &= \phi_o(x_1) . \text{ --- } . \phi_o(x_n)\end{aligned}$$

ce qui montre bien que $\phi_o(X)$ engendre S.

Réciproquement, si $\phi_o(X)$ engendre S , tout élément a de S s'écrit $a = a_1 . a_2 . --- . a_m$ où, pour tout i = 1,2,...,m, $a_i \in \phi_o(X)$ donc s'écrit $a_i = \phi_o(x_i)$ avec $x_i \in X$. Par suite :

$$a = \phi_o(x_1).\ \phi_o(x_2).\ ---\ .\phi_o(x_m) = \phi(x_1).\ \phi(x_2).\ ---\ .\ \phi(x_m)$$

$$= \phi(x_1 x_2 ... x_m) \text{ et en posant } w = x_1 x_2\ ---\ x_m \in F_X ,$$

on obtient bien $a = \phi(w)$: ϕ est surjectif.

Un dernier théorème, basé sur la définition (d) (p. 4) peut s'énoncer comme suit :

Théorème 3 : Soit X un ensemble non vide. Tout demi-groupe D libre sur X est isomorphe à F_X, demi-groupe des suites finies d'éléments de X.

Démonstration : On supposera D noté multiplicativement (.) . Tout élément a de D s'écrit de manière unique :

$$a = x_1 . x_2 .\ ---\ .\ x_n \quad \text{où } x_i (i = 1, ---\ , n) \in X$$

[définition(d) p. 4]

La correspondance $\phi : a = x_1 . x_2 .\ ---\ .\ x_n \longrightarrow x_1 x_2\ ---\ x_n$ est une application de D dans F_X, d'après l'unicité de la décomposition de a dans D.

Il est immédiat que ϕ est surjective.

ϕ est injective car F_X est libre sur X.

ϕ est un homomorphisme car si :

$a = x_1 . ---- . x_n$, $b = y_1 . ---- . y_p$ appartiennent à D, il vient :

$a.b = (x_1 . ---- . x_n).(y_1 . ---- . y_p) = x_1 . ---- . x_n . y_1 . ---- . y_p$; donc

$\phi(a.b) = x_1 --- x_n y_1 --- y_p = (x_1 --- x_n)(y_1 --- y_p) = \phi(a)\ \phi(b)$, (cqfd).

Conséquence : Je déduis immédiatement du théorème 3 une définition générale de F_X :

Définition de F_X :

Tout demi-groupe D, libre sur X, étant isomorphe à F_X, on conviendra de confondre en général D à F_X et on dira que F_X est le demi-groupe libre sur X.

-II-

Relations définissantes sur un demi-groupe.

1°) Rappels sur les relations binaires. Relation d'équivalence engendrée par une relation binaire.

(a) Relation binaire sur un ensemble ([1], pages 13-14).

E étant un ensemble quelconque, on appelle relation binaire sur E un sous-ensemble ρ du produit cartésien $E \times E$.

Si $\mathcal{B}_E$ désigne l'ensemble de toutes les relations binaires sur E, on sait ([1], p. 13) qu'on fait de $\mathcal{B}_E$ un demi-groupe en le munissant de la loi de composition (produit fonctionnel) suivante :

Si $\rho \in \mathcal{B}_E$, $\sigma \in \mathcal{B}_E$: $\rho \circ \sigma$ sera défini par les couples (a,b) tels que : $(a,b) \in \rho \circ \sigma$ si et seulement s'il existe $x \in E$ avec $\begin{cases} (a,x) \in \rho \\ (x,b) \in \sigma \end{cases}$

$\mathcal{B}_E$ admet un élément neutre qui est :

$\varepsilon = \{(x,x) : x \in E\}$ c'est-à-dire la diagonale de $E \times E$.

Il possède aussi un plus grand élément pour la relation d'inclusion : la relation universelle $\omega = E \times E$ ([1], p. 13).

Soit $\rho \in \mathcal{B}_E$, l'inverse de ρ est notée ρ^{-1} et définie par :

$(a,b) \in \rho^{-1}$ si et seulement si $(b,a) \in \rho$.

Autres définitions ([1], p. 14) :

Une relation binaire ρ est dite réflexive si, par définition :

$$\varepsilon \subseteq \rho$$

symétrique

$$\rho = \rho^{-1}$$

transitive

$$\rho \circ \rho \subseteq \rho$$

Propriétés : on démontre ([1], p. 14) que :

- la plus petite relation binaire réflexive contenant une relation binaire ρ est la relation $\rho \cup \varepsilon$.
- la plus petite relation symétrique contenant ρ est $\rho \cup \rho^{-1}$.
- la plus petite relation réflexive et symétrique contenant ρ est $\rho \cup \rho^{-1} \cup \varepsilon$.
- la plus petite relation transitive contenant une relation ρ (on la note ρ^t) est $\rho^t = \bigcup_{n=1}^{\infty} \rho^n = \rho \cup (\rho o \rho) \cup (\rho o \rho o \rho) \cup \cdots$
- Enfin la plus petite relation d'équivalence contenant une relation ρ est $(\rho \cup \rho^{-1} \cup \varepsilon)^t$: elle est contenue dans toute équivalence sur E contenant ρ. On dira que c'est l'équivalence sur E engendrée par ρ ([1], p. 14).

Cas où E est un demi-groupe : Soit S un demi-groupe.

Définissons d'abord $S^1 = \begin{cases} S \text{ si } S \text{ contient un élément neutre } 1 \\ S \cup 1 \text{ si } 1 \notin S \text{ avec } \forall x \in S \quad 1.x = x.1 = x \end{cases}$

En munissant S^1 de la même loi que S et en posant : $1.1 = 1$, S^1 sera aussi un demi-groupe avec élément neutre 1 ([1], p.4).

Etudions la congruence ρ sur un demi-groupe S engendrée par une relation binaire ρ_o ([1], p. 14) :

Posons $\rho_1 = \rho_o \cup \rho_o^{-1} \cup \varepsilon$, plus petite relation binaire réflexive et symétrique contenant ρ_o. A partir de ρ_1, définissons une relation binaire ρ_2 sur S, comme suit :

Pour $a,b \in S$, nous poserons :

$$a\ \rho_2 b \iff \exists\ c,d \in S\ ;\ \exists\ x,y \in S^1 \text{ tels que :}$$

$$\begin{cases} a = x\ c\ y \\ b = x\ d\ y \end{cases} \qquad \text{et } c\ \rho_1\ d\ .$$

On désignera le passage $a\ \rho_2 b$ de a à b (et symétriquement le passage de b à a) comme étant une " ρ_o - transition élémentaire " ([1], p. 18).

Remarque : ρ_o est ce que Ljapin appelle " 1ère relation dérivée " de ρ_o ([6], p. 41).

Il est immédiat que ρ_2 est réflexive, symétrique et compatible avec la loi de composition de S, et que $\rho_o \subseteq \rho_1 \subseteq \rho_2 \subseteq \rho$.
En définitive, la plus petite relation transitive ρ_2^t contenant ρ_2 est une congruence sur S contenant ρ_o et contenue dans ρ : elle est donc égale à ρ, $\rho_2^t = \rho$ ([1], p. 18).

Il s'en suit, par définition de ρ_2^t, que nous avons $a\ \rho\ b$ si et seulement si $a\ \rho_2^t\ b$ est vrai, c'est-à-dire si et seulement s'il existe $c_1, c_2, \text{---}, c_n \in S$ tels que l'on ait :

$$a\ \rho_2\ c_1,\ c_1\ \rho_2\ c_2,\ \text{---}\ ,\ c_i\ \rho_2\ c_{i+1},\ \text{---}\ ,\ c_n\ \rho_2\ b\ .$$

Nous énoncerons, comme au ([1], page 19) :

Théorème 4 : Soit ρ_o une relation binaire sur un demi-groupe S et ρ la congruence sur S engendrée par ρ_o. Pour $a,b \in S$, on a :
$a\ \rho\ b$ si et seulement si b peut être déduit de a par une suite finie de " ρ_o - transitions élémentaires ".

Remarque : la congruence ρ, engendrée par ρ_o, est ce que Ljapin appelle " 2e relation dérivée " de ρ_o ([6], p. 41) .

2°) Définitions relatives aux relations définissantes sur un demi-groupe.

(a) Soit X un ensemble non vide et F_X le demi-groupe libre sur X. Supposons ([1] , p. 41-42) que nous désirions établir certaines relations " génératrices " entre certains éléments de X, par exemple :

$xy = x \quad \forall x,y \in X$

$xy = y \quad \forall x,y \in X$

$xy = zt$ où $x,y,z,t \in X$.

Disons ([1] , p. 41-42) plus précisément que nous désirions définir des relations génératrices $u_\lambda = v_\lambda$ ($\lambda \in \Lambda$) où pour chaque λ d'un certain ensemble d'indices Λ, u_λ et v_λ sont des mots de F_X.

Posons $\rho_o = \{(u_\lambda , v_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$

ρ_o est une relation binaire sur F_X .

Soit, dans ces conditions, ρ la congruence sur F_X engendrée par ρ_o, on peut énoncer :

Proposition 1 ([1] , p. 42)

Si $h_c : F_X \longrightarrow F_X/\rho$ est l'homomorphisme canonique de F_X sur F_X/ρ (que nous noterons $\mathcal{D}$ pour toute la suite) alors :

(1) $h_c(X)$ est un système générateur pour $\mathcal{D}$.

(2) $h_c(u_\lambda) = h_c(v_\lambda) \quad \forall \lambda \in \Lambda$.

Démonstration :

(1) : tout élément de $\mathcal{D}$ s'écrit $h_c(w)$ où w est un mot de F_X (h_c surjectif). w s'écrit :

$w = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \text{ --- } x_n^{\alpha_n}$ où les α_i $(i = 1,2, \text{ --- }, n) \in \mathbb{N}^*$ et où deux x_i consécutifs quelconques sont distincts.

Pour des raisons de simplicité nous noterons la loi dans $\mathcal{D}$ par simple juxtaposition comme pour F_X .

Un élément quelconque de $\mathcal{D}$ s'écrit donc :

$$h_c(w) = h_c(x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \text{ --- } x_n^{\alpha_n}) = h_c(x_1^{\alpha_1})\, h_c(x_2^{\alpha_2}) \text{ --- } h_c(x_n^{\alpha_n})$$

$$= \left[h_c(x_1)\right]^{\alpha_1} \left[h_c(x_2)\right]^{\alpha_2} \text{ --- } \left[h_c(x_n)\right]^{\alpha_n}$$

c'est-à-dire comme " produit " fini de puissances entières (positives) d'éléments de $h_c(X)$: $h_c(X)$ est bien un système générateur pour $\mathcal{D}$.

(2) : il est immédiat que $h_c(u_\lambda) = h_c(v_\lambda)$ quel que soit $\lambda \in \Lambda$. En effet : $\rho_o \subseteq \rho$ entraîne : $(u_\lambda, v_\lambda) \in \rho$ quel que soit $\lambda \in \Lambda$, donc $u_\lambda \equiv v_\lambda \ (\rho) \ \forall \lambda \in \Lambda$, ce qui équivaut bien à :

$$h_c(u_\lambda) = h_c(v_\lambda) \ \forall \ \lambda \in \Lambda \ .$$

(b) Une première tentative de définition de $\mathcal{D} = F_X/\rho$ est donnée par Clifford et exprimée dans le théorème suivant, ([1], p. 41) :

Théorème 5 : Soit F_X le demi-groupe libre sur un ensemble non vide X. Soit ρ_o une relation binaire quelconque sur F_X et ρ la congruence sur F_X qu'elle engendre. Soit $h_c : F_X \longrightarrow \mathcal{D} = F_X/\rho$ l'homomorphisme canonique et S un demi-groupe quelconque.

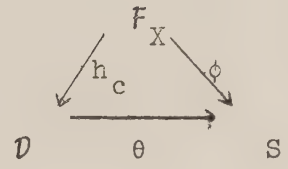
Si ϕ est un homomorphisme de F_X dans S tel que :

$\phi(u) = \phi(v)$ quels que soient $(u,v) \in \rho_o$, alors :

il existe un homomorphisme unique θ de $\mathcal{D}$ dans S tel que

$$\theta \circ h_c = \phi \ .$$

Démonstration :



Commençons par établir l'unicité de θ :

Supposons donc l'existence d'un homomorphisme θ

$\theta : \mathcal{D} \longrightarrow S$ vérifiant $\theta \circ h_c = \phi$ et soit H une classe modulo ρ. $H \in \mathcal{D}$ et s'écrit $H = h_c(w)$ où $w \in F_X$. On aura $\theta(H) = \theta\left[h_c(w)\right] = \theta \circ h_c(w) = \phi(w)$. Mais comme $H = h_c(w)$ est équivalent à $w \in H$, on devra donc avoir :

pour tout $H \in \mathcal{D}$ et tout $w \in H$, (1) : $\theta(H) = \phi(w)$.

Ce qui montre que si θ existe, il est unique.

Existence de θ : Si θ existe, il doit vérifier $\theta(H) = \phi(w)$ pour tout $H \in \mathcal{D}$ et tout $w \in H$. Mais cette égalité n'a de sens que si $\phi(w) = \phi(w')$ quels que soient $w, w' \in H$.

Montrons que cette condition est réalisée.

w et w' appartenant à la même classe H modulo ρ, w et w' sont congrus modulo ρ : w' se déduit donc de w par une suite finie de ρ_o - transitions élémentaires (théorème 4 p. 12).

Il suffira donc de montrer que $\phi(w) = \phi(w')$, si w' se déduit de w par une seule ρ_o - transition élémentaire.

Ce qui revient à écrire $w = w_1 u\, w_2$ et $w' = w_1 v\, w_2$ où : $w_1, w_2 \in F_X^1$ et $(u,v) \in \rho_o$ ou ρ_o^{-1} . Dans tous les cas, par hypothèse : $\phi(u) = \phi(v)$. D'où :

$$\phi(w) = \phi(w_1 u\, w_2) = \phi(w_1)\, \phi(u)\, \phi(w_2)$$
$$= \phi(w_1)\, \phi(v)\, \phi(w_2) = \phi(w') \quad \text{(cqfd)}$$

Moyennant cette condition, (satisfaite), l'application θ existe et est déterminée par : $\theta(H) = \phi(w)$ où $w \in H$.

θ ainsi définie, vérifie $\theta \circ h_c = \phi$ car quel que soit $w \in F_X$ $h_c(w)$ est une classe modulo ρ , contenant w, donc : si $H = h_c(w)$

$$\theta \circ h_c(w) = \theta\left[h_c(w)\right] = \theta(H) = \phi(w) .$$

θ est un homomorphisme : en effet si H et H' sont deux classes de $\mathcal{D}$, $H = h_c(w)$ et $H' = h_c(w')$ où $w, w' \in F_X$.

Il vient : $\theta(HH') = \theta\left[h_c(w)\, h_c(w')\right] = \theta\left[h_c(ww')\right] = \phi(ww')$

car $h_c(ww')$ est une classe modulo ρ et contient ww'.

En définitive :

$$\theta\,(HH') = \phi(w)\, \phi(w') = \theta(H)\, \theta(H') .$$

Le théorème 5 entraîne le corollaire immédiat suivant :

Corollaire 1 ([1], p. 42)

Si, dans l'énoncé du théorème 5, nous supposons l'homomorphisme $\phi : F_X \longrightarrow S$ (tel que $\phi(u) = \phi(v)\ \forall (u,v) \in \rho_o$) surjectif, alors l'homomorphisme $\theta : \mathcal{D} \longrightarrow S$, défini par $\theta \circ h_c = \phi$, l'est aussi.

Démonstration immédiate : Si ϕ est surjectif, quel que soit $a \in S$, il existe $w \in F_X$ tel que $a = \phi(w)$. Mais on vient de voir que

$\phi(w) = (\theta \circ h_c)(w)$, ce qui s'écrit

$\phi(w) = \theta[h_c(w)]$

Donc en posant $h_c(w) = H \in \mathcal{D}$ on a bien $a = \theta(H)$.

(c) Définitions relatives aux "relations définissantes "

([1] , p. 42) .

Soit X un ensemble non vide, posons $X = \{x_\iota : \iota \in I\}$.

Soit F_X le demi-groupe libre sur X. S étant un demi-groupe quelconque, soit ϕ un homomorphisme de F_X dans S et ϕ_o la restriction de ϕ à X. Posons $\phi_o(x_\iota) = a_\iota$ pour tout $\iota \in I$.

Soit w un mot quelconque de F_X ; comme ϕ prolonge ϕ_o à F_X , l'image $\phi(w)$ de w par ϕ est obtenue en substituant la " valeur " a_ι de S à la lettre x_ι partout où x_ι apparaît dans le mot w.

Appelons "procédé P " ce mode de formation de l'image $\phi(w)$ d'un mot w par tout homomorphisme ϕ de F_X dans un demi-groupe S.

On avait posé $\rho_o = \{(u_\lambda, v_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ (page 13), ρ_o relation binaire quelconque sur F_X . Décidons maintenant d'exprimer les

relations génératrices constituant ρ_o au moyen des égalités formelles $u_\lambda = v_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ que nous pouvons interpréter comme autant d' " équations aux inconnues x_ι " et où les x_ι sont les lettres de X formant les mots u_λ , v_λ $(\lambda \in \Lambda)$.

Dire dans ces conditions que $\phi(u) = \phi(v)$ $\forall (u,v) \in \rho_o$, revient à dire selon " P " que le système de valeurs $\{a_\iota : \iota \in I\}$ satisfait (en totalité ou en partie) à ces équations dans S ([1] , p. 42).

Tout ceci peut se résumer dans la définition suivante :

Définition (d_1) ([1] , p. 42) :

On dira qu'un demi-groupe S satisfait à des relations ρ_o : $u_\lambda = v_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ imposées dans le demi-groupe libre F_X sur un ensemble non vide $X = \{x_\iota : \iota \in I\}$ et considérées comme des " équations " en x_ι $(x_\iota \in X)$, s'il existe une application ϕ_o de X dans S telle que le système de " valeurs " $\phi_o(X) = \{a_\iota : \iota \in I\}$ de S satisfasse (en totalité ou en partie) dans S à ces équations.

Mais le théorème 1 (p. 7) dit que l'application $\phi_o : X \longrightarrow S$ peut être prolongée en un homomorphisme unique) ϕ de F_X dans S. Ainsi, si on convient de poser $\phi(\rho_o) = \{[\phi(u_\lambda), \phi(v_\lambda)] : \lambda \in \Lambda\}$ on définit une relation binaire $\phi(\rho_o)$ sur S.

J'affirme dans ces conditions que la définition (d_1) est équivalente à la suivante :

Définition (d_2) :

On dira qu'un demi-groupe S satisfait à un système ρ_o de relations $u_\lambda = v_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ imposées dans le demi-groupe libre F_X sur un ensemble non vide X s'il existe un homomorphisme ϕ de F_X dans S tel

$$\phi(u_\lambda) = \phi(v_\lambda) \quad \text{pour tout } \lambda \in \Lambda \ ,$$

c'est-à-dire tel que $\phi(\rho_o)$ soit un système d'égalités dans S.

Démonstration :

Si S satisfait à ρ_o au sens de la définition (d_1), il y satisfait au sens de la définition (d_2) :

en effet il existe alors une application $\phi_o : X \longrightarrow S$ telle que le système de valeurs $\phi_o(X) = A = \{a_\iota : \iota \in I\}$ satisfasse dans S aux " équations " $u_\lambda = v_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$, c'est-à-dire telle que, $\forall \lambda \in \Lambda$, $u_\lambda = v_\lambda$ devienne une égalité dans S lorsqu'on remplace dans u_λ et v_λ la " variable " x par sa " valeur " de S

$a_\iota = \phi_o(x_\iota)$ [Procédé P] .

Soit $\phi : F_X \longrightarrow S$ l'homomorphisme prolongeant ϕ_o à X [théorème 1, p. 7]. Le " procédé P " qui donne l'image h(w) d'un mot w par tout homomorphisme h de F_X dans un demi-groupe quelconque, montre donc bien que :

$$\forall \lambda \in \Lambda \ , \ \phi(u_\lambda) = \phi(v_\lambda), \quad \text{(cqfd)}$$

Il est immédiat que si S satisfait à ρ_o au sens de (d_2), il y satisfait au sens de (d_1) car il existe alors un homomorphisme $\phi : F_X \longrightarrow S$ tel que $\forall \lambda \in \Lambda$, $\phi(u_\lambda) = \phi(v_\lambda)$.

Donc, si $\phi_o : X \longrightarrow S$ est la restriction de ϕ à X, le " procédé P " prouve que la définition (d_1) est vérifiée, pour le système de " valeurs " $\phi_o(X)$.

Remarque importante :

Si S satisfait aux relations données [au sens de (d_1) ou (d_2)] on pourra dire (en abrégé) que S y satisfait pour un " système A de valeurs " a_ι ($\iota \in I$) de certains de ses éléments, en correspondance biunivoque avec X, $A = \phi_o(X)$.

Si ces éléments engendrent S, c'est-à-dire si A est un système générateur pour S, on pourra dire alors que S satisfait aux relations données " pour un système de générateurs " .

Mais on a vu dans le théorème 2 (p. 7) que $\phi_o(X)$ engendre S si et seulement si l'homomorphisme ϕ prolongeant ϕ_o à F_X est surjectif. J'en déduis la définition suivante :

Définition (d_3) :

On dira qu'un demi-groupe S satisfait à un système ρ_o de relations $u_\lambda = v_\lambda$ ($\lambda \in \Lambda$), données dans le demi-groupe libre F_X sur un ensemble non vide X, " pour un système de générateurs " s'il existe un homomorphisme surjectif $\phi : F_X \longrightarrow S$ tel que $\phi(u_\lambda) = \phi(v_\lambda)\ \forall \lambda \in \Lambda$, ou encore, tel que $\phi(\rho_o)$ soit un système d'égalités dans S.

Exemple : Si ρ est la congruence sur F_X engendrée par ρ_o alors le demi-groupe $\mathcal{D} = F_X/\rho$ satisfait à ρ_o au sens de (d_3) : il suffit de prendre pour ϕ l'homomorphisme canonique $h_c : F_X \to \mathcal{D}$ et d'appliquer la proposition 1, page 13.

Remarque : On pourrait être tenté de croire que les définitions (d_2) et (d_3) sont équivalentes. Mais ce n'est nullement le cas comme le prouve le contre - exemple suivant.

Contre - exemple simple : l'ensemble $\mathbb{N}^*$ des entiers naturels non nuls muni de l'addition est un demi-groupe, admettant $X = \{1\}$ comme système générateur minimal . $\mathbb{N}^*$ est libre sur X [définition (d) p. 4]. On peut le considérer comme étant le demi-groupe libre $F_{\{1\}}$, la loi de composition de $F_{\{1\}}$ étant cette fois l'addition.

Prenons pour relation **binaire** ρ_o sur $\mathbb{N}^*$ la relation d'égalité $\varepsilon = \{(n,n) : n \in \mathbb{N}^*\}$. Le demi-groupe additif $\mathbb{R}$ de tous les réels satisfait bien à ρ_o au sens de (d_2) [prendre pour homomorphisme $\phi : F_{\{1\}} \to \mathbb{R}$ celui qui prolonge à $\mathbb{N}^*$ l'application $\phi_o : 1 \longrightarrow 1$ de X dans $\mathbb{R}$, ϕ est l'injection canonique de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$], mais il n'existe aucun homomorphisme surjectif de $\mathbb{N}^* = F_{\{1\}}$ dans $\mathbb{R}$ [la puissance du continu étant strictement supérieure à la puissance du dénombrable].

$\mathbb{R}$ ne satisfait donc pas à ρ_o au sens de la définition (d_3).

Ce contre - exemple montre bien que la définition (d_3) n'est pas équivalente à (d_2). Remarquons cependant que (d_3) implique (d_2) en ce sens que tout demi-groupe qui satisfait à ρ_o au sens de (d_3) y satisfait au sens de (d_2).

Par suite, si on dit qu'un demi-groupe satisfait à ρ_o (sans plus), c'est au sens de la définition (d_2) qu'il s'agira.

Au cas plus précis où l'homomorphisme ϕ intervenant dans la définition est surjectif , et seulement dans ce cas, on précisera que S satisfait a ρ_o " pour un système de générateurs " [définition (d_3)].

" Relations définissantes " : définition générale.

Puisque la définition (d_3) implique que $\phi_o(X)$ [où $\phi_o = \phi|X$ restriction de ϕ à X] engendre S, les remarques et définitions précédentes conduisent à donner des " relations génératrices " constituant ρ_o la définition générale suivante :

Définition (D) ([6] , p. 346-347)

Soit $\rho_o = \{(u_\lambda , v_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ un système de relations imposées dans le demi-groupe libre F_X sur un ensemble $X \neq \emptyset$, et S un demi-groupe donné. On dira que ρ_o est un système de " relations définissantes " pour S si :

(1) S satisfait à ρ_o " pour un système de générateurs " [def.(d_3)]

(2) il existe un homomorphisme surjectif $h : F_X \longrightarrow S$ tel que :

- $h(u_\lambda) = h(v_\lambda)$ quel que soit $\lambda \in \Lambda$.
- toute relation d'égalité dans S se déduise nécessairement du système d'égalités $h(\rho_o)$ par " $h(\rho_o)$ - transitions élémentaires " dans S.
- les " ρ_o - transitions élémentaires " dans F_X et les " $h(\rho_o)$ - transitions élémentaires " dans S se correspondent biunivoquement par l'application h.

Remarque :

il résulte immédiatement de cette définition que si un couple (S, ρ_o) satisfait à (D), il satisfait à la **définition** (d_3).

Il est immédiat aussi que h définit une correspondance biunivoque entre la relation binaire ρ_o sur F_X et la relation binaire $h(\rho_o)$ sur S.

Exemple : Si ρ est la congruence sur F_X engendrée par ρ_o, alors ρ_o est un système de " relations définissantes " pour $\mathcal{D} = F_X/\rho$ **le demi-groupe quotient de** F_X par ρ .

En effet :

(1) $\mathcal{D}$ satisfait à ρ_o pour " un système de générateurs " car l'homomorphisme canonique $h_c : F_X \longrightarrow \mathcal{D}$ est surjectif et vérifie $h_c(u_\lambda) = h_c(v_\lambda)$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ [Proposition 1, p. 13].

(2) Toute relation d'égalité dans $\mathcal{D}$ est une conséquence des égalités $h_c(\rho_o)$, au sens des transitions élémentaires car si $W_1 = W_2$ est une relation d'égalité entre deux classes quelconques W_1, W_2 de $\mathcal{D}$, il existe $w_1, w_2 \in F_X$ tels que :

$W_i = h_c(w_i)$ $(i = 1,2)$ [h_c étant surjectif] . On aura la relation $h_c(w_1) = h_c(w_2)$ c'est-à-dire $w_1 \equiv w_2$ (ρ) : w_2 se déduit donc de w_1 par une suite finie de " ρ_o - transitions élémentaires " [théorème 4, p. 12]. On en déduit qu'on passe de $h_c(w_1)$ à $h_c(w_2)$ par une suite finie de $h_c(\rho_o)$ - transitions élémentaires, ce qui revient bien à une suite finie d'égalités appartenant à $h_c(\rho)$.

Conclusion : l'égalité $W_1 = W_2$ s'obtient bien au moyen des égalités $h_c(\rho_o)$ par transitions élémentaires.

Vérifions le rapidement dans le cas simple où w_2 se déduit de w_1 par une seule ρ_o - transition élémentaire en montrant que $W_2 = h_c(w_2)$ se déduit de $W_1 = h_c(w_1)$ par une seule $h_c(\rho_o)$ - transition élémentaire .

Une seule ρ_o - transition élémentaire entre w_1 et w_2 se traduit par $w_1 = t\ u\ t'$ et $w_2 = t\ v\ t'$ où $t, t' \in F_X^1$ et $(u,v) \in \rho_o$ ou ρ_o^{-1} . On en déduit :

$$\begin{cases} W_1 = h_c(w_1) = h_c(t)\ h_c(u)\ h_c(t') \\ W_2 = h_c(w_2) = h_c(t)\ h_c(v)\ h_c(t') \end{cases} \quad \text{où } \{h_c(u) = h_c(v)\} \in h_c(\rho_o)$$

et $h_c(t)$ et $h_c(t')$ appartiennent à $\mathcal{D}^1$, (cqfd) .

La démonstration précédente reste valable pour toute relation d'égalité faisant intervenir plusieurs classes de $\mathcal{D}$ puisque le " produit " de plusieurs classes est encore une classe.

ρ_o et $h_c(\rho_o)$ sont évidemment en correspondance biunivoque, ainsi que les " ρ_o - transitions élémentaires " dans F_X et les " $h_c(\rho_o)$ - transitions élémentaires " dans S, par l'application h.

Essayons maintenant de trouver une ou deux caractérisations du demi-groupe quotient $\mathcal{D} = F_X/\rho$ en exploitant les corollaires précités et les différentes définitions relatives aux " relations définissantes ".

Nous utiliserons les définitions (d_3) (p. 20) et (D) (p. 22).

Caractérisation de $\mathcal{D} = F_{X/\rho}$.

(a)

Nous conserverons dans tout ce qui suit les mêmes notations que précédemment. Nous allons commencer par un corollaire du théorème 5 (p. 15) et par quelques théorèmes préliminaires.

Corollaire 2 [analogue au corollaire 1 p. 17]

Tout demi-groupe S satisfaisant à ρ_o " pour un système de générateurs est une image homomorphe de $\mathcal{D}$.

En effet il existe alors un homomorphisme surjectif $\phi : F_X \longrightarrow S$ tel que $\phi(u) = \phi(v)$ pour tout $(u,v) \in \rho_o$ et d'après le théorème 5 [p. 15] un homomorphisme (unique $\theta : \mathcal{D} \longrightarrow S$ défini par $\theta \circ h_c = \phi$. En appliquant le corollaire 1 (page 17) on conclut que θ est surjectif (cqfd).

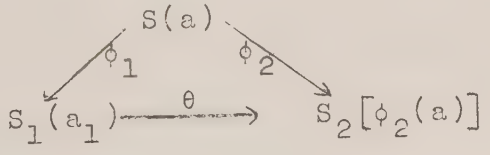
Le théorème suivant est ce qu'on appelle le théorème "d'homomorphisme induit " ([1] , p. 17) .

Théorème :

Soient ϕ_1 et ϕ_2 des homomorphismes d'un groupoïde S sur deux groupoïdes S_1 et S_2 respectivement, tels que $R_{\phi_1} \subseteq R_{\phi_2}$ où R_{ϕ_1} [resp. R_{ϕ_2}] désigne l'équivalence d'homomorphisme associée à ϕ_1 [resp. à ϕ_2] . Alors il existe un homomorphisme unique θ de S_1 sur S_2 tel que

$\theta \circ \phi_1 = \phi_2$.

Démonstration :



Unicité : Supposons qu'il existe un homomorphisme $\theta : S_1 \longrightarrow S_2$ vérifiant $\theta \circ \phi_1 = \phi_2$ (1) .

Si a_1 est un élément quelconque de S_1, par surjection pour ϕ_1 il existe $a \in S$ tel que $a_1 = \phi_1(a)$. On déduit de (1) :

$$\theta(a_1) = \theta[\phi_1(a)] = \theta \circ \phi_1(a) = \phi_2(a).$$

Donc : si θ existe, il doit vérifier pour tout $a_1 \in S_1$:

(2) $\theta(a_1) = \phi_2(a)$ et ceci pour tout $a \in S$ tel que $\phi_1(a) = a_1$

On voit ainsi que si θ existe, il est défini par (2), uniquement en fonction de ϕ_1 et de ϕ_2, d'où son unicité s'il existe.

Existence : Pour que θ existe, il faut que (2) soit réalisé. Mais (2) n'a de sens que si pour 2 éléments quelconques $a, b \in S$:

$$\phi_1(a) = \phi_1(b) \quad [= a_1] \quad \Longrightarrow \quad \phi_2(a) = \phi_2(b) \quad [= \theta(a_1)]$$

Cette implication, effectivement vraie, résulte de l'hypothèse $R_{\phi_1} \subseteq R_{\phi_2}$ car $\{\phi_1(a) = \phi_1(b) \Longleftrightarrow a \equiv b \ (R_{\phi_1})\} \Longrightarrow$ (hypothèse) $a \equiv b \ (R_{\phi_2})$ ou $\phi_2(a) = \phi_2(b)$

On peut donc définir θ par (2) :

$\forall a_1 \in S_1$, $\theta(a_1) = \phi_2(a)$ où $a \in S$ tel que $\phi_1(a) = a_1$.

Ce qui montre en même temps que $\theta \circ \phi_1 = \phi_2$ car $\forall a \in S$:

$$\theta \circ \phi_1(a) = \theta[\phi_1(a)] = \theta(a_1) = \phi_2(a) \quad (\text{avec } a_1 = \phi_1(a)).$$

θ est un homomorphisme : soient $a_1, b_1 \in S_1$, il existe $a, b \in S$ tels que $a_1 = \phi_1(a)$ et $b_1 = \phi_1(b)$. On en déduit :

$$\theta(a_1 b_1) = \theta[\phi_1(a)\ \phi_1(b)] = \theta[\phi_1(ab)] = \theta \circ \phi_1(ab) = \phi_2(ab)$$

$$= \phi_2(a)\ \phi_2(b) = \theta(a_1)\ \theta(b_1)$$

θ est surjectif, ϕ_1 et ϕ_2 l'étant.

Corollaire 3 ([1] , p. 17)

Si ρ_1 et ρ_2 sont deux congruences sur un groupoïde S telles que $\rho_1 \subseteq \rho_2$ alors S/ρ_2 est une image homomorphe de S/ρ_1 .

Démonstration : Pour appliquer le théorème précédent, prenons : $S_1 = S/\rho_1$ et $S_2 = S/\rho_2$, et pour ϕ_1 l'homomorphisme canonique $S \longrightarrow S/\rho_1$, pour ϕ_2 l'homomorphisme canonique $S \longrightarrow S/\rho_2$.

ϕ_1 et ϕ_2 sont surjectifs et $\rho_1 = R_{\phi_1} \subseteq \rho_2 = R_{\phi_2}$.

Le théorème précédent peut s'appliquer :

il existe donc un homomorphisme θ appliquant S/ρ_1 sur S/ρ_2

nous noterons $S/\rho_1 \sim S/\rho_2$: " S/ρ_2 image homomorphe de S/ρ_1 ".

(b) Principe de l'image homomorphe maximale ([1], page 18)

Soit C une catégorie de groupoïdes telle que si G_1 et G_2 sont 2 groupoïdes, les conditions $\begin{cases} G_1 \text{ et } G_2 \text{ sont isomorphes} \\ G_1 \in C \ [\text{ou } G_2 \in C] \end{cases}$

impliquent $G_2 \in C$ [ou $G_1 \in C$].

Soit dans ces conditions un groupoïde S fixé. Désignons par Γ_S l'ensemble, supposé non vide, de toutes les congruences R sur S telles que $S/R \in C$. Posons $\boxed{\rho = \bigcap_{R \in \Gamma_S} R}$ la plus petite congruence de Γ_S . alors, nous pouvons énoncer :

Proposition 2 ([1] , p. 18)

Si $S/\rho \in C$, alors S/ρ est une image homomorphe maximale de S appartenant à C (en ce sens que si T est une image homomorphe de S avec $T \in C$, alors T est aussi une image homomorphe de S/ρ).

Démonstration :

Supposons que $S/_\rho \in C$ et soit $T \in C$ tel qu'il existe un homomorphisme (surjectif) ϕ de S sur T. Désignons par R_ϕ l'équivalence d'homo - morphisme associée à ϕ.

D'après le théorème d'homomorphisme (pour les demi-groupes) T est isomorphe à $S/_{R_\phi}$ et comme $T \in C$, il en est de même de $S/_{R_\phi}$: ce qui entraîne que $R_\phi \in \Gamma_S$ (par définition de Γ_S). Il en résulte que $\rho \subseteq R_\phi$ et, en appliquant le corollaire 3, que $S/_{R_\phi}$ est une image homomorphe de $S/_\rho$ $\left[S/_\rho \sim S/_{R_\phi}\right]$.

L'isomorphisme $S/_{R_\phi} \overset{\sim}{=} T$ permet alors de conclure que T est bien une image homomorphe de $S/_\rho$, (cqfd).

(c) Application à $\mathcal{D} = {}^{F_X}/_\rho$:

Appliquons la théorie précédente en faisant jouer à F_X le rôle du groupoïde S et prenons pour catégorie C les demi-groupes D satisfaisant chacun à ρ_o " pour un système de générateurs " .

Il est immédiat que :

1) C n'est pas vide, puisque $\mathcal{D} = {}^{F_X}/_\rho$ satisfait à ρ_o au sens exigé, donc est un objet de C.

2) Si $D \in C$, tout demi-groupe D' isomorphe à D appartient à C car si $\phi : F_X \longrightarrow D$ est un homomorphisme surjectif tel que $\phi(u) = \phi(v), \forall (u,v) \in \rho_o$ [définition (d_3) p. 20] et $\psi : D \longrightarrow D'$ un isomorphisme, alors $\psi \circ \phi : F_X \longrightarrow D'$ est un homomorphisme surjectif tel que $\psi \circ \phi(u) = \psi \circ \phi(v)$ $\forall (u,v) \in \rho_o$ donc $D' \in C$.

Remarque : il suffit pour le 2) que D' soit une image homomorphe de D pour que $D' \in C$ si $D \in C$.

3) Γ_{F_X} est l'ensemble E des congruences sur F_X contenant ρ_o car à tout demi-groupe D appartenant à C correspond une telle congruence. En effet, il existe alors un homomorphisme $\phi : F_X \longrightarrow D$, surjectif, tel que $\phi(u) = \phi(v)\ \forall (u,v) \in \rho_o$.

Soit alors R_ϕ l'équivalence d'homomorphisme associée à ϕ.

On a $\rho_o \subseteq R_\phi$ et comme ρ est la plus petite congruence sur F_X contenant ρ_o, on a aussi $\rho \subseteq R_\phi$.

Le théorème d'homomorphisme indique que D est isomorphe à F_X/R_ϕ , donc en appliquant le 2) précédent :

$F_X/R_\phi \in C$ avec $R_\phi \in E$. Par conséquent il correspond bien à D la congruence R_ϕ contenant ρ_o et telle que $F_X/R_\phi \in C$.

Il reste à montrer que toute congruence R de E, c'est-à-dire contenant ρ_o (donc ρ) est telle que $F_X/R \in C$.

Or : $\rho \subseteq R \Longrightarrow S/\rho \sim S/R$ [corollaire 3, p. 27] et d'après la remarque [p. 29, à la fin du 2)] $S/R \in C$, (cqfd).

Γ_{F_X} étant l'ensemble des congruences sur F_X contenant ρ_o , donc ρ, et ρ appartenant elle-même à Γ_{F_X}, en définitive

$$\boxed{\rho = \bigcap_{R \in \Gamma_{F_X}} R} \quad .$$

Toutes les conditions du (b) (p. 27) sont réalisées .

On peut donc énoncer :

Théorème caractéristique de $\mathcal{D}$:

ρ_o étant un système de " relations définissantes " :

$$u_\lambda = v_\lambda \quad (\lambda \in \Lambda)$$

imposées dans le demi-groupe libre F_X sur un ensemble X non vide, et ρ la congruence sur F_X engendrée par ρ_o, désignons par C la catégorie des demi-groupes satisfaisant chacun à ρ_o " pour un système de générateurs ", alors $\mathcal{D} = F_X/\rho$, demi-groupe quotient de F_X par ρ, est une image homomorphe maximale de F_X appartenant à C.

Remarque : on pouvait ne pas détailler la démonstration de ce théorème et se borner à faire remarquer simplement que $\mathcal{D}$ est un objet de C et que tout demi-groupe appartenant à C est image homomorphe de F_X [définition (d_3) p. 20] et aussi image homomorphe de $\mathcal{D}$ [corollaire 2, p. 25] .

$\mathcal{D}$ vérifie ainsi la définition d'une image homomorphe maximale [proposition 2, p. 27].

Il serait toutefois intéressant d'établir que l'image homomorphe maximale $\mathcal{D}$ est définie dans C à un isomorphisme près. Ce problème reste ouvert.

(d) 2e caractérisation de $\mathcal{D} = F_X/\rho$

La définition (D) p. 22 fera l'objet de cette 2e caractérisation donnée dans le théorème suivant :

Théorème 6 ([6] , p. 349, 1-12)

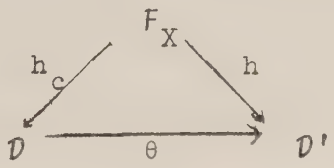
Tout demi-groupe $\mathcal{D}'$ admettant ρ_o comme système de relations définissantes est isomorphe à $\mathcal{D} = F_X/\rho$.

Démonstration :

D'après la définition (D) p. 22, il existe alors un homomorphisme surjectif $h : F_X \longrightarrow \mathcal{D}'$ tel que :

$h(u) = h(v)$ quels que soient $(u,v) \in \rho_o$ et tel que toute égalité (τ) dans $\mathcal{D}'$ soit une conséquence du système d'égalités $h(\rho_o)$ en ce sens qu'un membre de (τ) se déduit de l'autre par une suite finie de $h(\rho_o)$ - transitions élémentaires.

Mais selon le théorème 5 p. 15, à l'homomorphisme h est associé l'homomorphisme unique $\theta : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ défini par $\theta \circ h_c = h$.



θ est surjectif [corollaire 1, p. 17]. Montrons que :

θ est injectif : Soient donc W,W' deux classes modulo ρ telles que $\theta(W) = \theta(W')$ (τ). C'est une égalité, (τ), dans $\mathcal{D}'$; donc par hypothèse, $\theta(W')$ se déduit de $\theta(W)$ par une suite finie de $h(\rho_o)$-transitions élémentaires.

h_c étant surjectif, $W = h_c(w)$, $W' = h_c(w')$ avec $w,w' \in F_X$

L'égalité (τ) devient $\theta\left[h_c(w)\right] = \theta\left[h_c(w')\right]$ c'est-à-dire : $\theta \circ h_c(w) = \theta \circ h_c(w')$ ou encore $h(w) = h(w')$.

On veut obtenir $h_c(w) = h_c(w')$ c'est-à-dire $w \equiv w'\ (\rho)$ ou " w' se déduit de w par une suite finie de ρ_o - transitions élémentaires ". Il suffira donc de montrer que w' se déduit de w par une seule ρ_o - transition élémentaire lorsque h(w') se déduit de h(w) par une seule $h(\rho_o)$ - transition élémentaire.

Supposons donc $\begin{cases} h_c(w) = a\ h(u)\ b \\ h(w') = a\ h(v)\ b \end{cases}$

où $(a,b) \in \mathcal{D}'^1$ et $(u,v) \in \rho_o$ ou ρ_o^{-1}

$h : F_X \to \mathcal{D}'$ est surjectif, son prolongement à F_X^1 (où $1 \to 1$) l'est aussi ; donc il existe $t_1, t_2 \in F_X^1$ tels que :

$$a = h(t_1) \text{ et } b = h(t_2) .$$

Il s'en suit que $\begin{cases} h(w) = h(t_1)\ h(u)\ h(t_2) \\ h(w') = h(t_1)\ h(v)\ h(t_2) \end{cases}$

avec $t_1, t_2 \in F_X^1$ ou $h(t_1),\ h(t_2) \in \mathcal{D}'^1$

En définitive

$$\begin{cases} h(w) = h(t_1)h(u)h(t_2) \\ h(w') = h(t_1)h(v)h(t_2) \end{cases} (1) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} h(w) = h(t_1 u t_2) \\ h(w') = h(t_1 v t_2) \end{cases} (2)$$

La relation (1) montre que h(w') se déduit de h(w) par une seule $h(\rho_o)$ - transition élémentaire : à savoir, au moyen de l'égalité h(u) = h(v) appartenant à $h(\rho_o)$.

Les ρ_o - transitions élémentaires (dans F_X) et les $h(\rho_o)$ - transitions élémentaires (dans $\mathcal{D}'$) se correspondant biunivoquement par l'application h, de même que les relations binaires, ρ_o (sur F_X)

et $h(\rho_o)$ (sur $\mathcal{D}'$) [définition (D)] , on déduit des relations (1) et (2) qu'on passe de w à w' par une seule ρ_o - transition élémentaire, celle faisant intervenir $(u,v) \in \rho_o$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} w = t_1 \, u \, t_2 \\ w' = t_1 \, v \, t_2 \end{cases} \qquad \text{(cqfd)}$$

Du théorème 6 précédent, on aboutit à la conclusion que le demi-groupe défini, par un système ρ_o de relations définissantes est déterminé à un isomorphisme près .

De là, une définition générale de $\mathcal{D} = {}^{F_X}/_{\rho}$:

Définition : On dira que le demi-groupe quotient $\mathcal{D} = {}^{F_X}/_{\rho}$ est le demi-groupe sur l'alphabet X déterminé par le système ρ_o de relations définissantes.

-III-

Quelques propriétés des demi-groupes définis par un système de relations définissantes.

1°) Nous commencerons par une propriété fondamentale

(a) Théorème 7 ([6] , p. 355-356, 3-5)

Tout demi-groupe S est isomorphe à un demi-groupe quotient d'un demi-groupe libre.

Démonstration : Soit M un système générateur du demi-groupe S. Considérons le demi-groupe libre F_X sur un ensemble X équipotent à M, c'est-à-dire tel qu'il existe une bijection ϕ_o de X sur $M = \phi_o(X)$.

ϕ_o applique X dans S. Donc, d'après le théorème 1, p. 7 ϕ_o peut être prolongée en un homomorphisme (unique) ϕ de F_X dans S. Mais $M = \phi_o(X)$ engendre S ce qui a lieu si (et seulement si) ϕ ϕ est surjectif [théorème 2, p. 7] .

Par conséquent $S = \phi(F_X)$ et S est isomorphe à F_X/R_ϕ où R_ϕ désigne l'équivalence d'homomorphisme associée à ϕ , (cqfd).

Il est immédiat qu'un énoncé équivalent de ce théorème est : " Tout demi-groupe S est image homomorphe d'un demi-groupe libre ".

(b) Exemple : Soit S le demi-groupe N^* des entiers naturels non nuls muni de l'addition.

S est engendré par $M = \{1\}$ système générateur minimal. S est évidemment libre sur M [définition (d) p. 4]

Soit X un ensemble quelconque mais réduit au seul élément x, X = {x} . X est équipotent à M : soit ϕ_o : x → 1 la bijection correspondante. Elle applique X dans S.

ϕ_o peut être prolongée en un homomorphisme ϕ : $F_X \to S$.

ϕ est surjectif, $\phi_o(X) = M$ engendrant S [théorème 2, p. 7] . On en déduit l'isomorphisme $S \overset{\sim}{=} F_X/_\rho$ où ρ est l'équivalence associée à ϕ.

Dans cet exemple, ρ est l'égalité : en effet soient $w = x^m$, $w' = x^n$ $(m,n \in \mathbb{N}^*)$ deux mots de F_X congrus modulo ρ. Par définition de ρ : $w \equiv w'(\rho) \Longleftrightarrow \phi(w) = \phi(w')$, c'est-à-dire $\phi(x^m) = \phi(x^n)$ ou :

$$\underbrace{\phi(x) + \phi(x) + \text{---} + \phi(x)}_{m \text{ termes}} = \underbrace{\phi(x) + \phi(x) + \text{---} + \phi(x)}_{n \text{ termes}}$$

Mais comme $\phi(x) = \phi_o(x) = 1$, on a bien m = n et w = w'.

En définitive on a établi l'isomorphisme $S \overset{\sim}{=} F_X$.

Ce résultat peut s'énoncer ainsi :

Le demi-groupe additif $\mathbb{N}^*$ des entiers naturels non nuls est isomorphe à tout demi-groupe libre, admettant pour système générateur minimal un ensemble réduit à un élément.

2°) Nous allons établir à présent un théorème qui n'est qu'une généralisation du théorème bien connu de la théorie des groupes : le théorème de Von Dyck.

Théorème 8 ([6] , p. 348, 1-11 ; [3] , p. 101-102)
Soient ρ_o et ρ'_o deux systèmes de relations définissantes dans le même demi-groupe libre F_X sur X (ensemble non vide) tels que toute relation de ρ_o soit une relation de ρ'_o [on notera $\rho_o \subseteq \rho'_o$] . Si ρ [resp. ρ'] est la congruence sur F_X engendrée par ρ_o [resp. par ρ'_o] alors :

le demi-groupe $\mathcal{D}' = F_X/_{\rho'}$ sur X déterminé par ρ'_o est une image homomorphe du demi-groupe $\mathcal{D} = F_X/_{\rho}$ sur X déterminé par ρ_o .

Démonstration immédiate

$\rho_o \subseteq \rho'_o \Longrightarrow \rho \subseteq \rho'$ car si $w \equiv w'(\rho)$ $[w,w' \in F_X]$, on passe de w à w' par une suite finie de ρ_o - transitions élémentaires passage qui s'effectue au moyen d'un nombre fini de relations de ρ_o. Ces relations appartenant à ρ'_o, on passe aussi de w à w' par une suite finie de ρ'_o - transitions élémentaires : on a donc $w \equiv w'(\rho')$ et l'implication ci-dessus est démontrée.

Il suffit maintenant d'appliquer le corollaire 3, page 27 pour achever la démonstration : $\rho \subseteq \rho' \Longrightarrow \mathcal{D} = F_X/_{\rho} \sim \mathcal{D}' = F_X/_{\rho'}$

3°) Condition nécessaire et suffisante pour qu'un demi-groupe déterminé par des relations définissantes (c'est-à-dire du type $F_X/_{\rho}$) soit simplifiable ([2] , p. 167 note 20).

(a) On aura besoin de 2 définitions et d'un lemme.

1ère définition : R étant une équivalence sur un groupoïde S, on dira que R est simplifiable sur S(.) si :

$\forall\, a,b,c \in S$: $\{ab \equiv ac\ (R)\ [\text{ou } ba \equiv ca\ (R)]\} \Longrightarrow \{b \equiv c\ (R)\}$

Lemme : Si R est une congruence, alors

{R simplifiable sur S}

$\Longleftrightarrow$ { le groupoïde quotient $S/_R$ est simplifiable }

Démonstration immédiate : Soit h : S $\longrightarrow$ $S/_R$ l'homomorphisme canonique. Supposons R simplifiable sur S et soient A,B,C 3 classes modulo R telles que AB = AC. Il existe a,b,c $\in$ S tels que A = h(a), B = h(b), C = h(c). On aura : h(a) h(b) = h(a) h(c) c'est-à-dire h(ab) = h(ac) ou encore ab $\equiv$ ac (R) : ce qui implique, par hypothèse, b $\equiv$ c (R) ou h(b) = h(c) ou B = C (cqfd). Même démonstration pour [BA = CA $\Longrightarrow$ B = C].

Réciproquement si $S/_R$ est simplifiable, soient a,b,c $\in$ S tels que ab $\equiv$ ac (R). Cela signifie : h(ab) = h(ac) qui s'écrit : h(a) h(b) = h(a) h(c) et par simplification dans $S/_R$ on en déduit h(b) = h(c) ou encore b $\equiv$ c (R), (cqfd).

Même démonstration pour [ba $\equiv$ ca (R) $\Longrightarrow$ b $\equiv$ c (R)] .

2e définition ([5] , p. 14- 12) : Soit X un ensemble non vide et F_X le demi-groupe libre sur X. Si $w = x_1 x_2 \text{ --- } x_n$ est un mot de F_X , x_1 sera dit " premier élément " de w et x_n " dernier élément de w.

(b) Enonçons maintenant le théorème .

Théorème 9 : Soit ρ la congruence sur F_X (X ensemble non vide) engendrée par un système minimal ρ_o de relations définissantes $u_\lambda = v_\lambda$ ($\lambda \in \Lambda$) imposées dans F_X et dont aucune n'est l'égalité dans F_X. Pour que le demi-groupe $\mathcal{D} = F_X/\rho$ sur X déterminé par ρ_o soit simplifiable, il faut et il suffit que pour tout $\lambda \in \Lambda$:

(1) les " premiers éléments de u_λ et v_λ soient différents.

(2) les " derniers éléments " de u_λ et v_λ soient différents.

Démonstration : la condition est nécessaire.

En effet, ρ_o étant contenue dans ρ, pour tout $\lambda \in \Lambda$: $u_\lambda \equiv v_\lambda(\rho)$. Donc si ρ est simplifiable, il est nécessaire que u_λ et v_λ n'aient ni même premier élément, ni même dernier élément par minimalité de ρ_o.

Supposons par exemple qu'il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que u_λ et v_λ aient même premier élément : $u_\lambda = x_1 x_2 \text{ --- } x_m$ et $v_\lambda = x_1 y_2 \text{ --- } y_n$.

Alors $u_\lambda \equiv v_\lambda(\rho)$ s'écrit $x_1 x_2 \text{ --- } x_m \equiv x_1 y_2 \text{ --- } y_n \ (\rho)$ et donne $x_2 \text{ --- } x_m \equiv y_2 \text{ --- } y_n \ (\rho)$ [ρ simplifiable] . Posons :

$u'_\lambda = x_2 \text{ --- } x_m$ et $v'_\lambda = y_2 \text{ --- } y_n$.

Montrons qu'on peut remplacer dans ρ_o la relation définissante $u_\lambda = v_\lambda$ par la relation $u'_\lambda = v'_\lambda$. Il suffira, pour cela, que dans toute ρ_o - transition élémentaire portant sur $u_\lambda = v_\lambda$, on puisse remplacer u_λ et v_λ par u'_λ et v'_λ respectivement. Soient donc w,w' deux mots congrus modulo ρ se déduisant l'un de l'autre au moyen de u_λ et v_λ $\begin{cases} w = w_1 u_\lambda w_2 \\ w' = w_1 v_\lambda w_2 \end{cases}$ où $w_1, w_2 \in F_X^1$.

Si $w_1 = 1$ on aura : $\begin{cases} w = u_\lambda w_2 \\ w' = v_\lambda w_2 \end{cases}$

c'est-à-dire $\begin{cases} w = x_1 u'_\lambda w_2 \\ w' = x_1 v'_\lambda w_2 \end{cases}$

où $x_1, w_2 \in F_X^1$: w' se déduit bien de w par une transition élémentaire portant sur la relation $u'_\lambda = v'_\lambda$.

Si $w_1 \neq 1$ on aura $\begin{cases} w = w_1 x_1 u'_\lambda w_2 \\ w' = w_1 x_1 v'_\lambda w_2 \end{cases}$ et en posant $w'_1 = w_1 x_1 \in F_X^1$

on aura $\begin{cases} w = w'_1 u'_\lambda w_2 \\ w' = w'_1 v'_\lambda w_2 \end{cases}$

w' se déduit encore de w par une transition élémentaire portant sur $u'_\lambda = v'_\lambda$.

Donc, dans tous les cas, u_λ et v_λ peuvent être remplacés par u'_λ et v'_λ .

Ainsi : si $x_2 \neq y_2$ on remplacerait dans ρ_o la relation $u_\lambda = v_\lambda$ par la relation $u'_\lambda = v'_\lambda$, u'_λ et v'_λ n'ayant pas même " premier élément " .

si $x_2 = y_2$, on poursuivrait la simplification à gauche de $u_\lambda = v_\lambda$ jusqu'à l'obtention d'une relation définissante que l'on substituerait à $u_\lambda = v_\lambda$ dans ρ_o et dont les deux membres seraient des mots n'ayant pas même " premier élément " (opération possible vu que u_λ et v_λ ne sont pas égaux dans F_X).

Mais cette substitution dans ρ_o serait contraire à l'hypothèse " ρ_o minimal ", signifiant qu'aucune relation de ρ_o n'est super-

flue ni remplaçable par une autre relation définissante.

Même raisonnement si on supposait que u_λ et v_λ aient même " dernier élément ".

La condition est suffisante

Supposons que $\forall \lambda \in \Lambda$, u_λ et v_λ n'aient ni même " premier élément ", ni même " dernier élément " alors ρ est simplifiable.

Soient en effet $w, w', w'' \in F_X$ tels que $w\,w' \equiv w\,w''\ (\rho)$; il faut montrer qu'alors $w' \equiv w''\ (\rho)$. Pour cela il suffira de montrer qu'on passe de w' à w'' par une seule ρ_o - transition élémentaire, lorsque ww'' se déduit de ww' de la même façon : c'est-à-dire

s'écrivent $\begin{cases} ww' = w_1 u_\lambda w_2 \\ ww'' = w_1 v_\lambda w_2 \end{cases}$

où $(u_\lambda, v_\lambda) \in \rho_o$ ou ρ_o^{-1} et où $w_1, w_2 \in F_X^1$.

Nous distinguerons les éventualités suivantes, au nombre de trois :

1) si $w = w_1$, alors par simplification dans F_X, on aura :

$$\begin{cases} w' = 1\ u_\lambda\ w_2 \\ w'' = 1\ v_\lambda\ w_2 \end{cases}$$

où $1, w_2 \in F_X^1$; donc $w' \equiv w''\ (\rho)$ (cqfd) .

2) Si $w_1 = w\,w_1'$ où $w_1' \in F_X$ alors, par simplification dans F_X , on aura

$$\begin{cases} w' = w_1'\ u_\lambda\ w_2 \\ w'' = w_1'\ v_\lambda\ w_2 \end{cases}$$

où $w_1', w_2 \in F_X^1$; donc $w' \equiv w''(\rho)$, (cqfd) .

3) Si $w = w_1(x_1 \text{ --- } x_n)$ où x_i $(i = 1, \text{ --- }, n) \in X$ on aura par simplification dans F_X :

$$\begin{cases} x_1 \text{ --- } x_n w' = u_\lambda w_2 \\ x_1 \text{ --- } x_n w'' = v_\lambda w_2 \end{cases}$$

u_λ et v_λ auraient même " premier élément ", x_1 (contraire à l'hypothèse). Cette troisième éventualité est à rejeter. Les seuls cas possibles restants sont 1) et 2) pour lesquels on a bien : $w' \equiv w''(\rho)$.

Donc ρ est simplifiable à gauche.

Pour montrer que ρ est simplifiable à droite c'est-à-dire l'implication : $w'w \equiv w''w\ (\rho) \Longrightarrow w' \equiv w''(\rho)$, on reprendra le même raisonnement en faisant jouer à w_2 le rôle de w_1 et en utilisant l'hypothèse que u_λ et v_λ n'ont pas même " dernier élément ".

On trouvera un exemple de ce théorème plus loin (V^e partie).

4°) Condition nécessaire et suffisante pour qu'un demi-groupe déterminé par des relations définissantes (c'est-à-dire du type $F_X/_\rho$) soit libre.

(a) Démontrons d'abord deux lemmes.

Lemme 1 : Tout demi-groupe isomorphe à un demi-groupe libre est libre.

Démonstration : Soit F un demi-groupe libre et D un demi-groupe isomorphe à F. Nous supposerons que la loi dans F est la juxtaposition et le point . dans D.

F étant libre, il admet [définition générale p. 6] un système générateur minimal X sur lequel tout élément de F se décompose de manière unique [définition (d), p. 4] .

Soit $\alpha : F \to D$ un isomorphisme. Il est immédiat que :

Y = $\alpha(X)$ est un système générateur pour D : en effet tout $b \in D$ s'écrit $b = \alpha(a)$ où $a \in F$. Or $a = x_1 x_2 \text{ --- } x_n$ $[x_i \in X]$, donc

$$b = \alpha(x_1 x_2 \text{ --- } x_n) = \alpha(x_1) \cdot \alpha(x_2) \cdot \text{ --- } \cdot \alpha(x_n)$$
$$= y_1 \cdot y_2 \cdot \text{ --- } \cdot y_n \quad [y_i \in Y] \ .$$

Y est minimal : si un sous-ensemble strict $Y' \subset Y$ engendrait D, $\alpha^{-1}(Y') = X'$ serait un sous-ensemble strict de X ($X' \subset X$) qui engendrerait F [même démonstration que ci-dessus] : ce qui serait contraire à l'hypothèse X minimal.

Tout élément de D se décompose sur Y de manière unique :

car si on avait pour $b \in D$, $b = \begin{cases} y_1 \cdot y_2 \cdot \text{ --- } \cdot y_m \\ y'_1 \cdot y'_2 \cdot \text{ --- } \cdot y'_n \end{cases}$

où $y_i, y'_j \in Y$ $(i = 1, \text{ --- }, m \ ; \ j = 1, \text{ --- }, n)$

on aurait pour $\alpha^{-1}(b) = a \in F$ les deux décompositions :

$$a = \begin{cases} x_1 x_2 \text{ --- } x_m \\ x'_1 x'_2 \text{ --- } x'_n \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} x_i = \alpha^{-1}(y_i), & i = 1, \text{ --- }, m \\ x'_j = \alpha^{-1}(y'_j), & j = 1, \text{ --- }, n \end{cases}$$

ce qui impliquerait (par hypothèse sur X) : $m = n$ et $(\forall i)\ x_i = x'_i$.

En définitive, on aurait bien $y_i = y'_i \ \forall i = 1,2,\text{---}, m = n$.

D est donc libre sur Y [définition (d), p. 4] .

Lemme 2 ([7]) . Soit S un demi-groupe simplifiable et F un demi-groupe libre . Si $h : S \to F$ est un homomorphisme surjectif, alors F est isomorphe à un sous-demi-groupe libre de S.

Démonstration : Soit X un système générateur de F tel que F soit libre sur X. h étant surjectif, $\forall x \in X \subseteq F$, $h^{-1}(x) \neq \emptyset$.

Il existe donc $a \in h^{-1}(x)$ et par suite une application $\phi_o : X \to S$ telle que $\phi_o(x) = a$ [on fixe $a \in h^{-1}(x)$ pour tout $x \in X$, axiome du choix] . ϕ_o vérifie (1) $h \circ \phi_o = i_X$ application identique de X sur X.

D'après le théorème 1 p. 7 (évidemment valable pour un demi-groupe libre quelconque, voir définition de F_X, p. 9), l'application ϕ_o peut être prolongée en un homomorphisme unique $\phi : F \to S$.

Le schéma $F \overset{\phi}{\to} S \overset{h}{\to} F$ montre que $h \circ \phi$ est un endomorphisme de F et (1) implique (2) $h \circ \phi = i_F$ application identique de F sur F.

En effet soit $w = x_1 x_2 \cdots x_n$ appartenant à F, on a :

$$h \circ \phi(w) = h \circ \phi(x_1 \cdots x_n) = h[\phi(x_1 \cdots x_n)] = h[\phi(x_1) \cdot \cdots \cdot \phi(x_n)]$$
$$= h[\phi_o(x_1) \cdot \cdots \cdot \phi_o(x_n)] = h \circ \phi_o(x_1) \cdots h \circ \phi_o(x_n)$$
$$= x_1 \cdots x_n = w \quad \text{(cqfd)} \qquad [\cdot \text{ loi de } S]$$

Or l'égalité (2) implique que ϕ est injectif : F est donc isomorphe à un sous-demi-groupe D de S, D est libre selon le lemme 1.

(b) Nous avons pratiquement établi le théorème :

Théorème 10 : Soit ρ la congruence sur F_X (demi-groupe sur X ensemble $\neq \emptyset$) engendrée par un système ρ_o de relations définissantes imposées dans F_X. Alors le demi-groupe $\mathcal{D} = F_X/\rho$ sur X déterminé par ρ_o est libre si et seulement si $\mathcal{D}$ est isomorphe à un sous-demi-groupe libre de F_X.

Démonstration immédiate :

Si $\mathcal{D}$ est isomorphe à un sous-demi-groupe libre de F_X, il est libre, d'après le lemme 1.

Si $\mathcal{D}$ est libre, l'homomorphisme canonique $h_c : F_X \to \mathcal{D}$ étant surjectif, on peut appliquer le lemme 2 : $\mathcal{D}$ est donc isomorphe à un sous-demi-groupe $\mathcal{D}'$ de F_X [un isomorphisme ϕ de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{D}'$ étant défini par $h_c \circ \phi = i_{\mathcal{D}}$ lemme 2]. $\mathcal{D}'$ est libre [lemme 1] .

Remarque : Si on considère tous les demi-groupes quotients de F_X qui soient libres et les sous-demi-groupes libres de F_X auxquels ils sont isomorphes, on obtient le résultat suivant :

Corollaire 4.

Les seuls demi-groupes quotients d'un demi-groupe libre F qui soient libres sont isomorphes à des sous-demi-groupes libres de F.

5°) Problème particulier intéressant certains types de demi-groupes déterminés par des relations définissantes.

([6] , p. 356-357, de 3-6 à 3-10).

(a) Enoncé du problème (notons le P) : Soit X un ensemble non vide quelconque et F_X le demi-groupe libre sur X. Soit $\rho_o = \{(u_\lambda, v_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ une relation binaire sur F_X, système d'égalités formelles $u_\lambda = v_\lambda$ ($\lambda \in \Lambda$) qu'on a appelées " relations définissantes ".

On se propose d'étudier le problème suivant P :

à quelles conditions existe-t-il un demi-groupe S tel que :

(1) tout élément de X soit élément de S ($X \subseteq S$),

(2) X soit un système générateur de S,

(3) ρ_o soit un système d'égalités dans S dont il constitue un système de " relations définissantes "

(b) Analyse du problème

Soit $\mathcal{D} = {}^{F_X}/_{\rho}$ le demi-groupe sur X déterminé par ρ_o (où ρ est la congruence sur F_X engendreé par ρ_o).

Si S est un demi-groupe répondant aux conditions (1),(2),(3), la condition (3) implique que S est isomorphe à $\mathcal{D}$ [th. 6, p. 31]; $\mathcal{D}$ est parfaitement déterminé par la donnée de ρ_o, cherchons donc à quelles conditions $\mathcal{D}$ soit lui-même une solution du problème.

Soit $h_c : F_X \to \mathcal{D} = {}^{F_X}/_{\rho}$ l'homomorphisme canonique .
On a vu que $h_c(X)$ est un système générateur pour $\mathcal{D}$ et que $h_c(u_\lambda) = h_c(v_\lambda)$ quel que soit $\lambda \in \Lambda$ [Proposition 1, p. 13].

Pour que $\mathcal{D}$ soit une solution du problème, il suffit donc que $h_c(X)$ coïncide avec X.

Mais vu que pour tout $x \in X$, $x \in h_c(x)$ [classe modulo ρ contenant x]: $h_c(X) = X$ si et seulement si $h_c(x) = \{x\}$ pour tout $x \in X$, donc si et seulement si deux éléments différents quelconques de X ne sont pas congrus modulo ρ :

$$x \neq y \ (x,y \in X) \Longrightarrow x \not\equiv y \ (\rho)$$

Une solution quelconque S du problème étant isomorphe à $\mathcal{D}$, une première conclusion de l'analyse ci-dessus peut s'énoncer ainsi :

Une condition suffisante pour que le problème P admette une solution est que le système ρ_o de relations définissantes soit tel que deux éléments différents quelconques de X ne soient pas congrus modulo ρ :

$$x \neq y \ (x \in X, \ y \in X) \Longrightarrow x \not\equiv y \ (\rho).$$

Mais d'après ce qu'on a vu, cette condition suffisante est nécessaire aussi pour que $\mathcal{D}$ soit solution du problème

$[h_c(x) = \{x\}\ \forall x \in X\ ] \Longleftrightarrow [\forall x,y \in X : x \neq y \Rightarrow x \nmid y\ (\rho)\ ]$

Montrons qu'elle est nécessaire en général :

Supposons pour cela qu'il existe deux éléments distincts de X, x,y vérifiant $x \equiv y\ (\rho)$ et un demi-groupe S contenant X et satisfaisant aux conditions posées par le problème P.

La seule décomposition possible pour x et y dans F_X^1 étant

$$(4)\begin{cases} x = 1\ x\ 1 \\ y = 1\ y\ 1 \end{cases}$$

$x \equiv y\ (\rho)$ signifierait que y se déduit de x par une seule ρ_o - transition élémentaire, donc (4) montre que :

$$(x,y) \in \rho_1 = \rho_o \cup \rho_o^{-1} \cup \varepsilon$$

[voir page 8 : congruence engendrée par une relation binaire sur un demi-groupe]. Et comme $x \neq y$ entraînerait $(x,y) \notin \varepsilon$ [relation d'égalité de F_X qui contient X] on conclurait que $(x,y) \in \rho_o$ ou ρ_o^{-1}. Mais d'après la condition (3) et la définition (D) p. 22, ρ_o est un système d'égalités dans S, donc

$\rho_o = \rho_o^{-1}$ et $x = y$ dans S : contraire à l'hypothèse $X \subsetneq S$ et $x \neq y$.

En définitive :

Tout demi-groupe répondant à la question du problème P étant isomorphe à $\mathcal{D} = F_X/_\rho$, on énoncera :

Une condition nécessaire et suffisante pour que P admette une solution est que ρ_o soit tel que $x \neq y$ $(x \in X,\ y \in X) \Rightarrow x \nmid y\ (\rho)$.

Désignons la par C.

Si la condition C est vérifiée par ρ_o, la classe de tout x de X, modulo ρ, est {x} : une solution du problème P est alors le demi-groupe $\mathcal{D} = {}^{F}X/_{\rho}$ sur X déterminé par ρ_o et c'est la seule à un isomorphisme près [théorème 6, p.31].

(c) Remarque : Un tel problème serait évidemment sans fondement si pour tout X et tout système ρ_o de relations définissantes, on avait toujours l'implication :

$$x \equiv y \ (\rho) \quad (x \in X,\ y \in X) \Longrightarrow x = y \ .$$

En réalité, il est tout à fait possible d'avoir $x \equiv y \ (\rho)$ avec $x \neq y$ pour un certain couple (X, ρ_o).

Exemple simple : le demi-groupe additif Z des entiers relatifs est engendré par X = {-1, +1} et peut être assimilé au demi-groupe F_X^1 où 1 est ici l'élément 0 de Z, la loi dans F_X^0 étant l'addition. Prenons pour ρ_o la congruence modulo 2 qui définit $Z/_2$. Alors $\rho = \rho_o$ et on a :

$$-1 \equiv +1 \ (\rho) \quad \text{avec} \ -1 \neq +1$$

(d) Application à certains problèmes.

Le problème précédent peut donc se poser dans certains cas. Son principal intérêt est la simplification qu'il apporte dans les questions déjà traitées. X et ρ_o donnés (ρ_o vérifiant la condition C) il revient à la construction du demi-groupe engendré par X dont les éléments sont des produits finis de puissances entières positives d'éléments de X, ces produits étant éffectués

moyennant l'associativité (propriété fondamentale des demi-groupes) et compte-tenu des relations données qui permettent de les simplifier.

Exemple : Soit X = {x,y,z} un ensemble à 3 éléments x,y,z 2 à 2 distincts. Imposons les seules relations définissantes

$\rho_o \begin{cases} xy = x & (1) \\ yx = y & (2) \\ xz = zx & (3) \\ yz = zy & (4) \end{cases}$

Les éléments de X étant deux à deux distincts la forme des relations de ρ_o montre que deux quelconques d'entre eux ne sont pas congrus modulo ρ [voir la C.N.S de P, page 46].

La condition C est donc vérifiée et on peut déterminer les éléments de $\mathcal{D} = {}^{F}X/_{\rho}$ sous forme de produits finis de puissances entières positives d'éléments de X. Pour cela, on va exploiter au maximum les relations imposées, qui doivent être considérées en fait comme des égalités dans $\mathcal{D}$ [condition (3) du problème] .

Elles donnent les résultats suivants :

(2) $\Longrightarrow xyx = xy = x$

(1) $\Longrightarrow xyx = x^2$

on en déduit $x^2 = x$ donc $\boxed{x^m = x}\ \forall m \in \mathbb{N}^*$ (1')

De même

(1) $\Longrightarrow yxy = yx = y$

(2) $\Longrightarrow yxy = y^2$

on en déduit $y^2 = y$

donc (2') $\underline{y^n = y \ \forall n \in \mathbb{N}^*}$

Enfin, comme z permute avec x et y [relations (3) et (4)] :

(3') $\underline{(xz)^p = x^p z^p = xz^p \ (\forall p \in \mathbb{N}^*) = (zx)^p}$.

(4') $\underline{(yz)^q = y^q z^q = yz^q \ (\forall q \in \mathbb{N}^*) = (zy)^q}$.

On voit donc, d'après (1') (2') (3') (4') que les seuls éléments de $\mathcal{D}$ sont les suivants : x, y, z, xz^p, yz^q où p et q parcourent $\mathbb{N}^*$.

Revenons au problème P : nous avons mentionné (p. 47) que sa solution apportait une certaine simplification dans les questions déja étudiées. Donnons quelques exemples :

Dans le théorème 9, p.38 : si ρ_o est minimal et satisfait à la condition C (page 47), alors pour tout $\lambda \in \Lambda$:

$u_\lambda = v_\lambda$ est l'égalité dans $\mathcal{D}$ et la nécessité des conditions (1) et (2) du théorème est évidente : $\mathcal{D}$ est simplifiable si, $\forall \lambda \in \Lambda$, u_λ et v_λ n'ont pas même " premier élément " et même " dernier élément ".

Un autre exemple concerne le théorème 10 (p. 43) : dans ce théorème si ρ_o vérifie C alors $h_c(X) = X$ et le théorème devient :

" --- $\mathcal{D} = F_X/_\rho$, demi-groupe sur X déterminé par ρ_o, est libre si et seulement si $\mathcal{D}$ est un sous-demi-groupe libre de F_X .

Dans le corollaire 4 (p. 44) qui en découle on pourra alors confondre les demi-groupes quotients de F qui sont libres avec les sous-demi-groupes de F auxquels ils sont isomorphes, si on n'impose sur F que des systèmes ρ_o de relations définissantes satisfaisant à la condition C.

Après ces quelques propriétés des demi-groupes définis par des relations définissantes, abordons à présent la deuxième notion fondamentale de notre sujet : la notion " d'identité ".

-IV-

Notion " d'identité " et comparaison avec la notion de " relation définissante ".

1°) Définitions :

(a) Soit X un ensemble non vide et F_X le demi-groupe libre sur X. Un couple de mots (u,v) est appelé " identité " et est noté u = v (égalité formelle).

Une première définition relative à une identité est la suivante ([5] , p. 14-11).

Définition (d_2') :

On dit qu'un demi-groupe S satisfait à l'identité u = v imposée dans le demi-groupe libre F_X sur un ensemble X non vide si $\phi(u) = \phi(v)$ pour tout homomorphisme $\phi : F_X \to S$.

En comparant cette définition avec la définition (d_2) ou (d_3) (p.19 et 20) on s'aperçoit qu'une identité est une relation définissante en un système de telles relations.

On montrera plus loin que la réciproque n'est pas vraie en général.

Il est possible de considérer simultanément plusieurs identités dans un même demi-groupe F_X, c'est-à-dire comme dans le cas des relations définissantes, un système d'identités ([6] , p. 359, 4-1).

La définition (d_2') s'étend à un système ρ_o d'identités :

Définition (d_2') :

$\rho_o = \{u_\lambda = v_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ étant un système d'identités imposées dans F_X (le demi-groupe libre sur un ensemble X non vide), on dira qu'un demi-groupe S satisfait à ρ_o si :

$$\phi(u_\lambda) = \phi(v_\lambda) \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

pour tout homomorphisme $\phi : F_X \to S$.

Cette définition et la définition (D) (p. 22) conduisent à la définition générale suivante qui précise le rapport entre les deux notions étudiées :

Définition (D') :

Soit $\rho_o = \{(u_\lambda , v_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ un système de " relations définissantes " imposées dans le demi-groupe libre F_X sur un ensemble X non vide et S un demi-groupe donné.

On dira que ρ_o est un " système d'identités " définissant S si

(1) S satisfait à ρ_o au sens de (d_2') : pour tout homomorphisme $\phi : F_X \to S$, $\phi(u_\lambda) = \phi(v_\lambda) \; \forall \lambda \in \Lambda$.

(2) pour tout homomorphisme $h : F_X \to S$:

- toute relation d'égalité dans S se déduit nécessairement du système d'égalités $h(\rho_o)$ par $h(\rho_o)$ - transitions élémentaires dans S.

- les ρ_o - transitions élémentaires dans F_X et les $h(\rho_o)$ - transitions élémentaires dans S se correspondent biunivoquement par l'application h.

(b) Exemple de demi-groupe défini par un système d'identités : une identité étant une relation définissante, un demi-groupe répondant aux conditions de la définition (D') est évidemment le demi-groupe $\mathcal{D} = {}^{F_X}/_{\rho}$ où ρ est la congruence sur F_X engendrée par le système ρ_o d'identités.

On dira que $\mathcal{D} = {}^{F_X}/_{\rho}$ est le demi-groupe sur X défini par le système d'identités ρ_o .

2°) Une relation définissante n'est pas en général une identité : Pour le prouver, nous allons construire un système ρ_o de " relations définissantes " et un demi-groupe S satisfaisant à ρ_o au sens de la définition (d_2) (p. 19) et ne satisfaisant pas à ρ_o au sens de la définition (d_2') (p. 51) relative aux identités.

Nous justifierons ainsi en même temps la définition (D').

Pour cette construction, reprenons l'exemple illustrant le problème particulier P, de la page 48 .

$$X = \{x,y,z\} \qquad \begin{matrix} x \neq y \neq z \\ x \neq z \end{matrix} \qquad \rho_o \begin{cases} xy = x & (1) \\ yx = y & (2) \\ xz = zx & (3) \\ yz = zy & (4) \end{cases}$$

On a vu que les éléments du demi-groupe $\mathcal{D}$ ($= {}^{F_X}/_{\rho}$) sur X déterminé par ρ_o sont : x, y, z, xz^p, yz^q où $p,q \in N^*$.

On sait aussi que $\mathcal{D}$ satisfait à ρ_o au sens de la définition (d_2) [et même (d_3)] [Prendre l'homomorphisme canonique $h_c : F_X \to D$ dont la restriction à X est l'application identique de X sur X, condition C] .

Soit maintenant ϕ_o une application de X dans $\mathcal{D}$ définie de la façon suivante :

$$\phi_o \begin{cases} x \to z \\ y \to y \\ z \to z \end{cases}$$

D'après le théorème 1 (p.7), ϕ_o peut être prolongée en un homomorphisme (unique) ϕ de F_X dans $\mathcal{D}$. Pour ce ϕ on a :

pour la 1ère relation définissante (1) :

$$\begin{cases} \phi(xy) = \phi(x)\ \phi(y) = \phi_o(x)\ \phi_o(y) = zy \\ \phi(x) = \phi_o(x) = z. \end{cases}$$

pour la 2éme relation définissante (2) :

$$\begin{cases} \phi(yx) = \phi(y)\ \phi(x) = \phi_o(y)\ \phi_o(x) = yz \\ \phi(y) = \phi_o(y) = y \end{cases}$$

Puisqu'on a supposé $y \neq z$ et $yz = zy$, on ne peut avoir simultanément

$$\begin{cases} \phi(xy) = \phi(x) \\ \phi(yx) = \phi(y) \end{cases}$$

L'une au moins de ces égalités n'est donc pas réalisée : ce qui montre bien que $\mathcal{D}$ ne satisfait pas à ρ_o au sens de la définition (d_2') et que ρ_o n'est pas un système d'identités pour $\mathcal{D}$ mais seulement un système de relations définissantes.

Conclusion :

Toute identité ou système d'identités est une relation définissante ou un système de telles relations.

La réciproque n'est pas vraie en général. Elle l'est seulement dans le cas où le système ρ_o satisfait aux hypothèses de la définition (D').

-V-

Applications

1°) Applications aux groupes : groupes libres .

(a) Construction du groupe libre sur un ensemble X de lettres :

Soit X un ensemble d'éléments qu'il sera commode d'appeler "lettres" X = {x,y, --- }. Associons à X un ensemble X' sans point commun avec X et correspondant bijectivement avec X. Soit x' l'image dans X' de l'élément x de X : on dira que x et x' sont associées ([3] , p. 96-97).

Un mot est (comme on l'a vu) un élément du demi-groupe libre $F_{X \cup X'}$ sur $X \cup X'$. On considérera ici en plus le mot vide (qu'on note 1) qui ne comprend aucune lettre.

Un mot est dit réduit s'il ne contient pas de couples de lettres associées consécutives. Ex. xy'z est réduit, xyy'z'zt et xy'yzz't ne le sont pas ([3] , p. 96).

Deux mots réduits sont égaux s'ils sont constitués par les mêmes lettres écrites dans le même ordre ([3] , p. 97).

Considérons l'ensemble $\mathcal{D}$ de tous les mots réduits (y compris le mot vide 1) qu'on peut écrire avec les lettres éléments de X et les lettres associées éléments de X' [j'adopte la notation $\mathcal{D}$ car nous verrons plus loin que $\mathcal{D}$ peut être considéré comme demi-groupe sur $X \cup X'$ défini par des relations définissantes].

On montre ([3] , p. 97-98) que l'ensemble $\mathcal{D}$ de ces mots réduits (auquels on adjoint 1) est un groupe avec la loi de composition T définie par A T B = R(AB) où A et B sont 2 mots réduits et R(AB)

désigne le mot réduit obtenu à partir du mot AB en supprimant dans AB tous les couples de lettres associées consécutives.

On dit que $\mathcal{D}$ est le groupe libre sur X.

(b) Détermination de $\mathcal{D}$ par des relations définissantes ([1] , p. 43) .

Soit $F^1 = F_{X \cup X', \cup \{1\}}$ le demi-groupe libre sur $X \cup X'$ auquel on a adjoint un élément neutre, le mot vide 1.

Posons

$$\rho_o = \{(xx',1) : x \in X \} \cup \{(x'x,1) : x \in X\}$$

On impose ainsi dans F^1 les relations définissantes :

$$\rho_o \begin{cases} xx' = 1 \\ x'x = 1 \end{cases} \qquad \forall x \in X \quad ([3] , p. 43)$$

Soit alors ρ la congruence sur F^1 engendrée par ρ_o , j'affirme que le groupe libre $\mathcal{D}$ sur X est $\mathcal{D} = F^1/\rho$.

En effet deux éléments différents quelconques de $X \cup X'$ ne sont pas congrus modulo ρ (il suffit de regarder la forme des relations données pour l'affirmer). La condition C du problème particulier (p. 47) est donc vérifiée par ρ_o. Par suite F^1/ρ ne contiendra que des éléments de F^1 . D'autre part, imposer $xx' = 1 = x'x$ pour tout $x \in X$ revient à réduire tous les mots de F^1 : F^1/ρ est donc formé des mots réduits de F^1 et uniquement de ceux-là

On a donc bien :

$$\mathcal{D} = F^1/\rho$$

(c) Quelques propriétés des groupes libres :

1. En tant que demi-groupe libre, le groupe $\mathcal{D} = F^1/\rho$ ainsi défini vérifie le théorème 1 (page 7) ([1] , p. 43, exemple 1).

Soit en effet un groupe G d'élément neutre e, noté multiplicativement (.) et soit ϕ_1 une application de X dans G.

Soit ϕ_o le prolongement de ϕ_1 à $X \cup X'$ défini par

$$\begin{cases} \phi_o(x) = \phi_1(x) \\ \phi_o(x') = [\phi_1(x)]^{-1} \end{cases} \quad \text{pour tout } x \in X \ [x' \text{ associé de } x]$$

D'après le théorème 1 (page 7) [qui ne change pas par l'adjonction du mot vide 1] ϕ_o peut être prolongé en un homomorphisme unique ϕ de $F^1 = F^1_{X \cup X'}$ dans G. Ainsi, pour tout $x \in X$:

$$\phi(xx') = \phi(x) \cdot \phi(x') = \phi_o(x) \cdot \phi_o(x') = \phi_1(x) \cdot [\phi_1(x)]^{-1} = e = \phi(1)$$

et de même $\phi(x'x) = e = \phi(1)$. Donc pour tout $x \in X$:

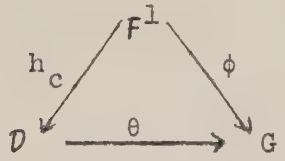
$$\begin{cases} \phi(xx') = \phi(1) \\ \phi(x'x) = \phi(1) \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire } \phi(u) = \phi(v) \ \forall (u,v) \in \rho_o$$

Les hypothèses du théorème 5 (page 15) sont donc réalisées : il existe un homomorphisme unique $\theta : \mathcal{D} \to G$ défini par $\theta \circ h_c = \phi$.

Nous avons ainsi montré que toute application ϕ_1 de X dans un groupe G peut être prolongée de manière unique en un homomorphisme θ de $\mathcal{D}$ dans G.

$$X \xrightarrow{\phi_1} G$$
$$X \cup X' \xrightarrow{\phi_o} G$$

Schéma



$$\theta \circ h_c = \phi$$

- h_c : homomorphisme canonique $F^1 \longrightarrow \mathcal{D} = F^1/\rho$
- $\phi_1 = \phi_o \mid X$ (restriction de ϕ_o à X)
- $\phi_o = \phi \mid X \cup X'$ (restriction de ϕ à $X \cup X'$)
- comme $h_c(x) = \{x\}$ $\forall x \in X$ on a :

$$\phi_1 = \phi_o \mid X = \phi \mid X = \theta \circ h_c \mid X = \theta \mid X$$

2. Tout groupe G est isomorphe à un groupe-quotient d'un groupe libre [même démonstration que pour le théorème 7, p. 34]
([3] , p. 100)

2°) Exemples de demi-groupes définis par un système de relations définissantes.

(a) demi-groupe cyclique

Tout demi-groupe cyclique fini $S = \langle x \rangle$ de générateur x peut être considéré comme le demi-groupe sur $X = \{x\}$ donné par la seule

(b) demi-groupe commutatif

Soit X un ensemble non vide et non réduit à un seul élément. Posons

$\rho_o = \{(xy, yx) : x,y \in X \ (x \neq y)\}$

Nous imposons ainsi dans F_X les relations définissantes :

ρ_o : $xy = yx \ \forall x,y \in X \ (x \neq y)$ dont chacune est l'identité caractéristique de la commutativité, ρ_o est un système d'identités.

On peut affirmer que le demi-groupe $\mathcal{D} = F_X/\rho$ sur X défini par le système d'identités ρ_o est commutatif et simplifiable.

$\mathcal{D}$ est commutatif : soit en effet $h_c : F_X \to \mathcal{D}$ l'homomorphisme canonique, alors $\forall x,y \in X \ (x \neq y)$ on a [Proposition 1, p. 13] :

$$h_c(xy) = h_c(yx) \quad \text{c'est-à-dire } h_c(x)\, h_c(y) = h_c(y)\, h_c(x).$$

h_c étant surjectif et les éléments du système générateur $h_c(X)$ de $\mathcal{D}$ commutant deux à deux, $\mathcal{D}$ est bien commutatif.

$\mathcal{D}$ est simplifiable : on pourrait appliquer le théorème 9 (p. 38) . Mais il serait peut être intéressant de le vérifier sur cet exemple simple.

Soient donc $w,w',w'' \in F_X$ tels que $ww' \equiv ww'' \ (\rho)$. ρ_o étant visiblement symétrique et transitive : $\rho_o = \rho_o^{-1}$ et $\rho_2^t = \rho_2 = \rho$

et on peut écrire :

$$\begin{cases} ww' = w_1 \, u \, w_2 \\ ww'' = w_1 \, v \, w_2 \end{cases} \quad \text{où } w_i \ (i = 1,2) \in F_X^1 \text{ et } (u,v) \in \rho_o = \rho_o^{-1} .$$

Donc il existe $x,y \in X \ (x \neq y)$ tels que $u = xy$ et $v = yx$.

On aura :

$$\begin{cases} ww' = w_1 \, x \, y \, w_2 \\ ww'' = w_1 \, y \, x \, w_2 \end{cases}$$

Reconsidérons les éventualités de la page 40 :

1) Si $w = w_1$ alors par simplification dans F_X

$$\begin{cases} w' = 1.\ xy.\ w_2 \\ w'' = 1.\ yx.\ w_2 \end{cases} \qquad \text{avec } 1,\ w_2 \in F_X^1$$

donc $w' \equiv w'' \ (\rho)$

2) Si $w_1 = ww_3$, alors par simplification dans F_X

$$\begin{cases} w' = w_3.\ xy.\ w_2 \\ w'' = w_3.\ yx.\ w_2 \end{cases} \qquad \text{avec } w_3, w_2 \in F_X^1$$

on a encore $w' \equiv w'' \ (\rho)$

3) Si $w = w_1 w_4$, w_4 commencera par x et y et il faudra $x = y$, ce qui n'est pas par hypothèse. L'éventualité (3) est à rejeter. Dans les deux premières, on a bien $w' \equiv w'' \ (\rho)$.

Donc ρ est simplifiable à gauche. Même démonstration pour montrer que ρ est simplifiable à droite.

Remarquons qu'on a ici un exemple de demi-groupe satisfaisant aux conditions du problème P, page 44 . Il est en effet visible que deux éléments différents quelconques de X, x,y ne sont pas congrus modulo ρ car $(x,y) \notin \rho_o = \rho_o^{-1}$, donc $x \equiv y \ (\rho)$ entraînerait $(x,y) \in \varepsilon_{F_X}$, soit $x = y$.

Il en résulte que $h_c(X) = X$ et X est un système générateur de $\mathcal{D}$: $\mathcal{D}$ est en somme un demi-groupe commutatif et simplifiable contenant X qui en est un système générateur.

Le demi-groupe $\mathcal{D}$ ainsi défini peut-il être libre sur une partie Y de X ? Si c'est le cas, en appliquant le corollaire 4 page 44 , $\mathcal{D}$ devient le sous-demi-groupe libre F_Y de F_X, dans lequel $xy = yx \ \forall x,y \in Y$. Mais ceci implique $x = y$ (par définition de l'égalité dans un demi-groupe libre). Y est donc réduit à un seul élément x et le demi-groupe $\mathcal{D} = F_Y$ est un demi-groupe cyclique, de générateur x.

Plus généralement le demi-groupe libre F_X sur un ensemble X est commutatif si et seulement si X est réduit à un élément, l'égalité $xy = yx$ $(x,y \in X)$ entraînant $x = y$ ([4] , p. 127).

Conclusion : Les seuls demi-groupes libres qui soient commutatifs sont les demi-groupes cycliques.

Remarque : Par analogie avec les groupes abéliens libres (p. 58) on pourrait cependant définir les demi-groupes abéliens libres. Soit en effet $X = \{a,b,c, \text{---} \}$ un " alphabet " quelconque. L'ensemble L de toutes les combinaisons avec répétition d'éléments de X muni de la loi de juxtaposition est un demi-groupe abélien libre. Par exemple a^2b et ba^2 représenteront le même mot de L. Un mot quelconque w de L pourra s'écrire :

$w = a^{\alpha}b^{\beta} \text{---} \ell^{\lambda}$, où $\alpha,\beta,\text{---},\lambda \in \mathbb{N}$; a,b, --- , ℓ étant écrits dans un ordre choisi à priori.

(c) anti-demi-groupe :

Soit X un ensemble non vide et F_X le demi-groupe libre sur X

Posons $\rho_o = \{(xy,x) : x,y \in X\}$

Nous imposons ainsi dans F_X les relations définissantes :

$xy = x \quad \forall x,y \in X$ dont chacune est l'identité caractéristique d'un anti-demi-groupe à droite ([5] , p. 14-12).

Donc ρ_o est un système d'identités. On peut affirmer que :

le demi-groupe $\mathcal{D} = {}^{F_X}/_{\rho}$ sur X défini par le système d'identités ρ_o est un anti-demi-groupe à droite.

En effet si $h_x : F_X \to \mathcal{D} = {}^{F_X}/_{\rho}$ est l'homomorphisme canonique $h_c(X)$ engendre $\mathcal{D}$ et $h_c(xy) = h_c(x) \quad \forall x,y \in X$ c'est-à-dire :

$$h_c(x)\, h_c(y) = h_c(x) \qquad \forall x,y \in X$$

Les éléments générateurs de $\mathcal{D}$ vérifient donc l'identité caractéristique d'un anti-demi-groupe à droite, (cqfd).

On remarque, qu'ici aussi, $h_c(x) = \{x\} \; \forall x \in X$: ρ_o satisfait à la condition C p. 47. $\mathcal{D}$ est donc engendré par X, et comme ρ_o, par sa forme, montre que $\mathcal{D}$ est équipotent à X, $\mathcal{D}$ peut être identifié à l'ensemble X muni de la loi de composition définie par $xy = x \; \forall x,y \in X$ (1).

Dès que X contient plus d'un élément, $\mathcal{D}$ n'est pas simplifiable car pour $x \neq y \quad (x,y \in X)$ on a bien :

$xy = x^2$ (conséquence de (1)).

BIBLIOGRAPHIE

[1] CLIFFORD A.H. et PRESTON G.B.

The algebraic theory of semi-groups,

volume 1, American mathematical society

[2] CROISOT R .

Automorphismes intérieurs d'un semi-groupe ".

Bulletin de la Societé mathématique de France - tome 82 .

Fascicule II.

[3] DUBREIL P. et JACOTIN M.L.

Leçons d'Algèbre Moderne ".

Collection universitaire de Mathématiques. Dunod.

[4] KUROSH A.G.

The theory of groups . Volume 1.

Chelsea Publishing Company, New-York, N.Y.

[5] LEFEBVRE P.

Sur la structure de demi-groupes idempotents.

Séminaire Dubreil-Pisot (Algèbre et théorie des nombres)

13^{è} année 1959-60 n° 14.

[6] LJAPIN E.S.

Semi-groups. Volume 3.

Translations of mathematical monographs.

[7] SPEHNER J.C.

Demi-groupoïde ou groupoïde partiel. Extensions d'un demi-groupoïde .

Séminaire d'Algèbre (janvier 1967). Faculté des Sciences .

Besançon.

JURY : MM. CHATELET Président

LEFEBVRE Examinateurs

PARIZET

VU ET APPROUVE

BESANCON, le

Le Doyen de la Faculté des Sciences

VU, et permis d'imprimer

BESANCON, le

Le Recteur de l'Académie de Besançon